A10. Wyznaczanie modułu sztywności za pomocą wahadła torsyjnego

***Celem ćwiczenia** jest poznanie własności sprężystych ciał stałych, analiza ruchu obrotowego bryły sztywnej na przykładzie wahadła torsyjnego oraz doświadczalne wyznaczenie modułu sztywności.*

Moduł sztywności G – to współczynnik sprężystości materiału, równy stosunkowi ***naprężenia stycznego*** σ_s do kąta skręcenia α deformowanego ciała: $G=\sigma_s/\alpha$ [N/m^2]. Występuje w ***odkształceniach postaciowych***, przy zachowaniu stałej objętości ciała.

Wahadło torsyjne – jest rodzajem ***wahadła fizycznego***. Stanowi je bryła sztywna–wibrator, umocowany do cienkiego drutu, jako elementu sprężystego. Po odchyleniu wahadła z położenia równowagi o kąt α i po jego uwolnieniu, powstają drgania pod wpływem ***momentu siły*** *M*, przy czym: $M = -D \cdot \alpha$ (1)

Współczynnik D (zależny od rodzaju drutu) nazywa się ***momentem kierującym*** i oznacza wartość momentu siły, powodującego skręcenie drutu o jednostkowy kąt w mierze łukowej, tzn. o 1 radian. Znak minus oznacza, że moment siły powoduje skręcenie drutu o kąt przeciwny do kąta α (tzn. zawsze ku położeniu równowagi).

Równanie ruchu wahadła torsyjnego jest analogiczne do równania wahadła fizycznego i jednocześnie jest równaniem ***ruchu obrotowego bryły sztywnej***:

$$M=I\,\gamma \qquad (2),$$

gdzie *I* oznacza ***moment bezwładności*** bryły, a $\gamma = d\omega/dt$ jest ***przyśpieszeniem kątowym***, równym pochodnej prędkości kątowej ω po czasie *t*. Uwzględniając (1) otrzymujemy więc równanie ruchu wahadła w postaci:

$$I\frac{d\omega}{dt} = -D \cdot \alpha \qquad (3),$$

którego rozwiązanie: $\alpha = A\sin\omega t$ oznacza, że jest to ***ruch harmoniczny prosty*** o amplitudzie *A*.

Okres drgań wahadła torsyjnego T, analogicznie jak w przypadku wahadła fizycznego, jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (4).$$

Moment bezwładności *I* wibratora, stosowanego w ćwiczeniu, obliczamy korzystając z ***twierdzenia Steinera****:

$$I = I_o + 2md^2 \qquad (5),$$

gdzie *m* – oznacza masę jednego z dwóch walców umieszczonych na wibratorze po obu stronach drutu, *d* – ich odległość od osi obrotu wahadła.

Mówi ono, że: *moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności I_o względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy tej bryły i kwadratu odległości d między obu osiami ($I=I_o+md^2$).*

Wstawiając (5) do równania (4) i podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$$T^2 = 4\pi^2\frac{(I_o + 2md^2)}{D} = \frac{4\pi^2 I_o}{D} + \frac{8\pi^2 m}{D}d^2. \qquad (6)$$

Znajdując w eksperymencie zależność kwadratu okresu drgań wahadła (T^2) od kwadratu odległości walców wibratora od osi obrotu (d^2), można – korzystając z równania linii prostej – znaleźć moment kierujący wahadła D, wyliczając współczynnik kierunkowy otrzymanej graficznie prostej.
Z drugiej strony wiadomo, że między momentem kierującym D a modułem sztywności G zachodzi relacja:

$$D = \frac{\pi r^4}{2L} G \qquad (7)$$

(r – promień drutu, L – jego długość). Korzystając z powyższej zależności, można wyliczyć moduł sztywności badanego drutu:

$$G = \frac{D \cdot 2L}{\pi r^4} \qquad (8).$$

Literatura uzupełniająca:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker - Podstawy fizyki – T.1 rozdz. 11.7-11.9, T2. rozdz.16
2. Cz. Bobrowski – Fizyka –krótki kurs – rozdz. 1.4
3. S. Przestalski – Fizyka z elementami biofizyki i agrofizyki – Część 1 rozdz.1

Zobacz też:

symulacje komputerowe na stronie internetowej *Katedry Fizyki i Biofizyki*

(https://sparrow.up.poznan.pl/kfb/) (zakładka: *Symulacje zjawisk fizycznych*).

A10. Protokół pomiarów i obliczeń

Nr pary:	Imię i nazwisko studenta:	Kierunek studiów: Grupa:
Data:	Imię i nazwisko prowadzącego:	Zaliczenie:

Wykonanie ćwiczenia

Przyrządy: laboratoryjne wahadło torsyjne, śruba mikrometryczna, suwmiarka, licznik drgań.

1. Włączamy do sieci licznik drgań.
2. Umieszczamy walce wibratora w odległości d = 3cm (0.03m), licząc od osi obrotu do środka walców.
3. Uruchamiamy wahadło odchylając wibrator od położenia równowagi o około 15°, a następnie przyciskiem „start" włączamy pomiar liczby drgań wahadła i czasu ich trwania.
4. Po zarejestrowaniu 9 drgań naciskamy przycisk „stop", co automatycznie przerywa pomiar po dziesiątym pełnym drganiu. Czas odczytany na liczniku dzielimy przez 10 i zapisujemy w tabeli, jako wartość zmierzonego okresu T. Pomiar powtarzamy 3 razy i obliczamy wartość średnią $\overline{T}$.
5. Analogiczne pomiary wykonujemy dla kilku innych wartości d, zmieniając odległość walców od osi obrotu, co 1cm, aż do osiągnięcia odległości d = 0.09 m.
6. Za pomocą suwmiarki mierzymy średnicę drutu 2r oraz długość drutu L_c jako sumę długości obu jego fragmentów (tj. części górnej L_g i części dolnej L_d) mierzonych od punktu zaczepienia do punktu zawieszenia wibratora, czyli $L_c = L_g + L_d$.

Tabela

L.p.	Odległość walców d [m]	Kwadrat odległości d^2 [m^2]	Okres drgań T [s]	Kwadrat okresu $\overline{T}^2$[s^2]
1	0.03		1 2 3 $\overline{T}$ =	
2	0.04		1 2 3 $\overline{T}$ =	
3	0.05		1 2 3 $\overline{T}$ =	
4	0.06		1 2 3 $\overline{T}$ =	

5	0.07		1 2 3 $\bar{T}$ =	
6	0.08		1 2 3 $\bar{T}$ =	
7	0.09		1 2 3 $\bar{T}$ =	

r = ...[m] L_g = ...[m] L_d = ... [m] $L_c = L_g + L_d$ = ...[m]

$\Delta r = \Delta L_g = \Delta L_d$ = ... [m] $\Delta L_c = \Delta L_g + \Delta L_d$ = ... [m]

Opracowanie wyników

1. Sporządzamy wykres zależności kwadratu okresu drgań wahadła (T^2) od kwadratu odległości walców od osi obrotu (d^2), tj. funkcji $T^2 = f(d^2)$. Następnie obliczamy współczynnik kierunkowy A otrzymanej prostej*.

   **Wyjaśnienie*: *wzór (1) zapisany w postaci:* $T^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} d^2 + \frac{4\pi^2 I_o}{D}$ *przedstawia równanie linii prostej typu: y=Ax+B, gdzie A jest współczynnikiem kierunkowym prostej, tj.* $A = \frac{8\pi^2 m}{D}$.

   Wartość A oraz błąd ΔA możemy obliczyć za pomocą programu komputerowego.

   Uwaga: Jeśli współczynnik kierunkowy A otrzymanej prostej wyznaczamy z wykresu sporządzonego na papierze milimetrowym, wówczas błąd współczynnika kierunkowego ΔA wyznaczamy z dokładności odczytu poszczególnych wartości naniesionych na wykresie – patrz „Graficzna analiza wyników" (https://sparrow.up.poznan.pl/kfb/).

   Po odpowiednim zaokrągleniu znalezionych wartości zapisujemy:

   $$A = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\ [s^2/m^2]$$

2. Przyjmując masę walców m = 0.194 [kg] i znając wartość współczynnika kierunkowego A obliczamy wartość momentu kierującego D ze wzoru: $D = \frac{8\pi^2 m}{A}$.

3. Następnie obliczamy moduł sztywności G materiału, z którego wykonano drut o średnicy $2r$, korzystając ze wzoru: $G = \frac{D \cdot 2L}{\pi r^4}$, gdzie $L = \frac{L_g \cdot L_d}{L_c}$

   (podany powyżej wzór określający długość L wynika z faktu, że nasze wahadło jest umocowane w dwóch punktach zaczepienia).

4. Błąd ΔG obliczamy metodą różniczki logarytmicznej: $\Delta G = \left(\left|\frac{\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{\Delta L}{L}\right| + \left|\frac{4\Delta r}{r}\right| \right) G$

   przy czym: $\frac{\Delta L}{L} = \left|\frac{\Delta L_g}{L_g}\right| + \left|\frac{\Delta L_d}{L_d}\right| + \left|\frac{\Delta L_c}{L_c}\right|$ oraz $\frac{\Delta D}{D} = \left|\frac{\Delta A}{A}\right|$

5. Uzyskane wyniki zaokrąglamy i zestawiamy na końcu protokołu w postaci: $(G \pm \Delta G)10^n$ [*jedn.*].