A14. Pomiar momentu bezwładności bryły za pomocą wahadła fizycznego.

***Celem ćwiczenia** jest analiza ruchu wahadła fizycznego, wyznaczenie jego momentu bezwładności oraz poznanie metody wyznaczania momentów bezwładności dla różnych osi obrotu bryły.*

Ruch obrotowy bryły sztywnej rozważamy, jako sumaryczny ruch wszystkich punktów tej bryły po okręgach o różnych promieniach i o środkach leżących na osi obrotu. Momentem bezwładności bryły nazywamy wielkość skalarną *I* zdefiniowaną następująco:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (1)$$

gdzie m_i jest masą punktu materialnego, r_i jego promieniem obrotu, a sumowanie dotyczy wszystkich punktów tworzących bryłę. Stosując rachunek całkowy można wyznaczyć momenty bezwładności dla regularnych brył obrotowych względem ich osi symetrii ($I = \int r^2 dm$). Dla walca o promieniu *R* i masie m wynosi on $I = 0.5mR^2$, a dla pierścienia, czyli wydrążonego walca:

$$I_0 = 0{,}5m\left(r^2 + R^2\right) \qquad (2)$$

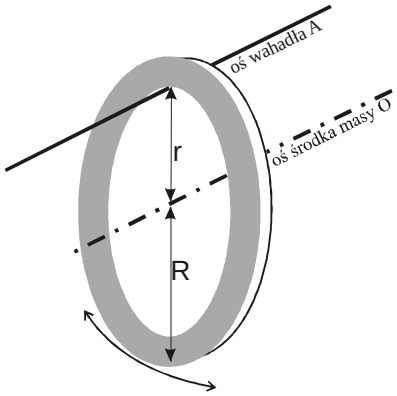
Jeżeli bryła wykonuje ruch obrotowy względem osi „A” nie będącej jej osią symetrii, czyli nie przechodzącej przez środek masy, wtedy jej moment bezwładności jest zdecydowanie większy. Możemy go wtedy wyliczyć na podstawie **twierdzenia Steinera**, które mówi, że:

moment bezwładności względem dowolnej osi „A” równoległej do osi przecinającej środek masy „O” jest równy sumie momentu bezwładności względem osi O (I_o) i iloczynu całej masy bryły i kwadratu odległości między osiami (a), *czyli:*

$$I_A = I_0 + ma^2 \qquad (3)$$

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej mówi , że **na skutek działania momentu siły *M* bryła uzyskuje przyspieszenie kątowe *γ* oraz, że *M=I· γ*.** Widać stąd, że wielkość *I* jest miarą bezwładności obracającego się ciała, analogicznie jak masa jest miarą bezwładności w ruch postępowym.

Wartość momentu bezwładności bryły określa również parametry ruchu wahadła fizycznego utworzonego z tej bryły.



Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną zawieszoną na poziomej osi obrotu A przechodzącej powyżej środka masy bryły. Jeżeli zostanie ona odchylona od położenia równowagi o niewielki kąt, to poruszać się wówczas będzie ruchem wahadłowym o stałym okresie T, którego wartość wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgr}} \qquad (4)$$

gdzie I_A oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi zawieszenia, r - odległość tej osi od środka masy, m- masę całej bryły, g – przyspieszenie ziemskie.

Posługując się prostym wahadłem fizycznym, na podstawie powyższego wzoru możemy obliczyć wartość momentu bezwładności I_A względem osi wahadła dokonując pomiarów masy bryły m, odległości r oraz okresu drgań wahadła T. W przypadku brył regularnych zawieszonych na osi równoległej do osi symetrii, znając moment bezwładności I_A , możemy na podstawie twierdzenia Steinera obliczyć moment bezwładności I_o względem osi przecinającej środek masy, jak to zrobimy w niniejszym ćwiczeniu.
Schemat doświadczenia przedstawia rysunek. Badaną bryłą jest regularny metalowy pierścień, czyli wydrążony walec.

Literatura uzupełniająca:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker - Podstawy fizyki – T.1, rozdz.11.7
2. Cz. Bobrowski – Fizyka –krótki kurs – rozdz.1.4
3. S. Przestalski – Fizyka z elementami biofizyki i agrofizyki – Część 1.1.
4. P.G. Hewitt – Fizyka wokół nas – rozdz.7

Zobacz też:

symulacje komputerowe na stronie internetowej *Katedry Fizyki i Biofizyki* **(https://sparrow.up.poznan.pl/kfb/)** (zakładka: *Symulacje zjawisk fizycznych*).

A14. Protokół pomiarów i obliczeń

Nr pary:	Imię i nazwisko studenta:	Kierunek studiów: Grupa:
Data:	Imię i nazwisko prowadzącego:	Zaliczenie:

Wykonanie ćwiczenia

Przyrządy: badany pierścień, statyw z poziomą osią, waga laboratoryjna, suwmiarka, stoper.

1. Wyznaczamy na wadze masę pierścienia *m*.
2. Mierzymy suwmiarką średnicę zewnętrzną *2R* i wewnętrzną *2r* pierścienia.
3. Zawieszamy pierścień na osi, wychylamy z położenia równowagi i pozwalamy mu się swobodnie wahać, zwracając uwagę, aby ruch odbywał się bez poślizgu i w płaszczyźnie prostopadłej do osi.
4. Mierzymy za pomocą stopera czas trwania 10 pełnych drgań t_{10} wahadła (przez pełne drganie rozumiemy np. cykl, gdy wahadło startując z maksymalnego wychylenia, odchyli się w przeciwną stronę i powróci do pierwotnego położenia)
5. Pomiar ten powtarzamy 5-krotnie.

Tabela 1

m [kg]	*2R* [m]	*2r* [m]	*R* [m]	*r* [m]

Δm = ... [kg]

$\Delta r = \Delta R$ = …….. [m]

Tabela 2

l.p.	1	2	3	4	5
t_{10} [s]					
T [s]					

	$T_{śr}$ [s] =	$\Delta T_{śr}$ [s] =
	I_A[kg·m^2]=	ΔI_A[kg·m^2]=
Zestawienie $(I_A \pm \Delta I_A)[kg \cdot m^2] =$		
Moment bezwładności doświadczalny	$I_o^{dośw.}$[kg·m^2]=	$\Delta I_o^{dośw.}$[kg·m^2]=
Zestawienie ($I_o^{dośw.} \pm \Delta I_o^{dośw.}$)[kg·m^2]=		
Moment bezwładności teoretyczny	$I_o^{teor.}$[kg·m^2] =	$\Delta I_o^{teor.}$[kg·m^2] =
Zestawienie ($I_o^{teor.} \pm \Delta I_o^{teor.}$)[kg·m^2]=		

Opracowanie wyników

1. Obliczamy promień wewnętrzny *r* i zewnętrzny *R* pierścienia.
2. Znając czasy trwania 10 drgań, obliczamy wartości okresu drgań *T* dla każdego z przeprowadzonych pomiarów ($T = t_{10}/10$) i znajdujemy ich wartość średnią $T_{śr.}$.
3. Następnie przekształcając wzór: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgr}}$ obliczamy moment bezwładności I_A:

$$I_A = \frac{T_{śr.}^{\,2} mgr}{4\pi^2}.$$

4. Na podstawie obliczonej wartości I_A i twierdzenia Steinera ($I_A = I_0 + ma^2$) wyznaczamy moment bezwładności $I_o^{dośw.}$ względem środka masy pierścienia: $I_o^{\text{dośw.}} = I_A - ma^2$ (gdzie $a = r$).
5. Następnie obliczamy teoretyczną wartość momentu bezwładności $I_o^{teor.}$ względem środka masy pierścienia: $I_0^{teor.} = 0{,}5m\left(r^2 + R^2\right)$. Wartość tę porównujemy z doświadczalną wartością $I_o^{dośw.}$ otrzymaną na podstawie przeprowadzonych pomiarów okresu drgań wahadła (p.4).

6. Obliczamy błędy pomiarowe:

$$\Delta I_A = I_A\left[\left|\frac{2\Delta T_{śr}}{T_{śr}}\right| + \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta r}{r}\right|\right] \quad \text{przy czym:} \quad \Delta T_{śr.} = 3\cdot SD = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_{śr.} - T_i\right)^2}{n(n-1)}}$$

$$\Delta I_o^{dośw.} = |1|\Delta I_A + \left|a^2\right|\Delta m + |2ma|\Delta a$$

$$\Delta I_o^{teor.} = \left|0.5\left(r^2 + R^2\right)\right|\Delta m + |mr|\Delta r + |mR|\Delta R.$$

7. Zestawiamy otrzymane wartości I_A, $I_o^{dośw.}$ i $I_o^{teor.}$ z – odpowiednio zaokrąglonymi – błędami bezwzględnymi tych wielkości w postaci: $(I \pm \Delta I)\,jedn.SI$.