A6. Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą różnicowego wahadła matematycznego

***Celem ćwiczenia** jest poznanie wielkości opisujących pole grawitacyjne, analiza ruchu harmonicznego na przykładzie wahadła matematycznego oraz doświadczalne wyznaczenie przyśpieszenia ziemskiego.*

Przyspieszenie ziemskie g – to przyspieszenie, jakie nadaje swobodnie spadającemu ciału, *siła grawitacji F*, czyli siła, z jaką Ziemia przyciąga dane ciało. Wyrażamy je w m/s^2.
Jeżeli masę danego ciała oznaczymy przez m, masę Ziemi - przez M, a jej promień przez R, to ***siłę grawitacji*** określa wzór:

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2} \qquad (1),$$

który stanowi ***prawo grawitacji*** Newtona (*stała grawitacji* G = 6.67· 10^{-11} Nm^2/kg^2).

Masa Ziemi, jak każda masa, wywiera wpływ na otaczającą ją przestrzeń, wytwarzając wokół siebie tzw. ***pole grawitacyjne***. Natężenie tego pola definiujemy jako $\gamma = F/m$ i na powierzchni Ziemi jest ono liczbowo równe przyśpieszeniu ziemskiemu $(\gamma=g)$.

Wahadło matematyczne – to punkt materialny (w praktyce oznacza małą metalową kulkę) zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici. Kulka wychylona z położenia równowagi i swobodnie puszczona porusza się ***ruchem drgającym harmonicznym***, pod wpływem składowej stycznej siły ciężkości (F). Siła ta, jak i wywołane przez nią przyspieszenie (a), są proporcjonalne do wychylenia (x) kulki, drgającej wokół położenia równowagi: $F = -m \cdot a = -m\omega^2 x$, gdzie częstość kołowa $\omega = 2\pi/T$, a T jest okresem drgań wahadła.
Dla małych wychyleń, ***okres drgań wahadła matematycznego T*** jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości wahadła (l), a odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z przyśpieszenia ziemskiego g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2)$$

Okres T nie zależy natomiast ani od amplitudy drgań, ani od masy wahadła.

Wzór (2) może służyć do obliczenia przyspieszenia ziemskiego g, jeżeli zmierzymy okres drgań wahadła T i jego długość l. Czasami jednak trudno jest bardzo precyzyjnie wyznaczyć długość wahadła, czyli odległość od punktu jego zawieszenia do środka masy kulki. Warto wówczas posłużyć się: ***różnicowym wahadłem matematycznym,*** które jest zwykłym wahadłem matematycznym, tak zmodyfikowanym, że posiada ruchomy punkt zawieszenia wahadła. Zmieniając położenie suwaka na skali, zmienia się jednocześnie długość wahadła. Metoda ta nie wymaga więc pomiaru bezwzględnej długości wahadła, ale pozwala precyzyjnie określić zmiany jego długości Δl. Wystarczy dokonać pomiaru okresu drgań T_1 i T_2 dla dwóch różnych położeń suwaka (d_1 i d_2), czyli dla dwóch różnych bezwzględnych długości wahadła l_1 i l_2.

Korzystając ze wzoru (2) otrzymujemy wówczas:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \text{oraz} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}\,.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony każdego z powyższych równań i odejmując je stronami, otrzymujemy równanie: $T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\Delta l$ (przy czym: $\Delta l = l_1 - l_2 = d_1 - d_2$), z którego – po przekształceniu - uzyskuje się wzór na przyśpieszenie ziemskie:

$$g = 4\pi^2 \frac{\Delta l}{T_1^2 - T_2^2} \qquad (3).$$

Literatura uzupełniająca:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker - Podstawy fizyki – T.2, rozdz. 14, 16
2. Cz. Bobrowski – Fizyka –krótki kurs – rozdz.1.8
3. S. Przestalski – Fizyka z elementami biofizyki i agrofizyki – część 1 rozdz.4
4. P.G. Hewitt – Fizyka wokół nas – rozdz.8

Zobacz też:

symulacje komputerowe na stronie internetowej *Katedry Fizyki i Biofizyki* **(https://sparrow.up.poznan.pl/kfb/)** (zakładka: *Symulacje zjawisk fizycznych*),

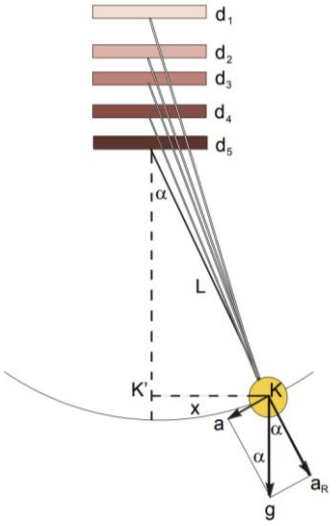
A6. Protokół pomiarów i obliczeń

Nr pary:	Imię i nazwisko studenta:	Kierunek studiów: Grupa:
Data:	Imię i nazwisko prowadzącego:	Zaliczenie:

Wykonanie ćwiczenia

Przyrządy: różnicowe wahadło matematyczne, licznik okresów drgań.

1. Ustawiamy suwak, regulujący długość wahadła matematycznego, w górnym położeniu liniału, aby uzyskać maksymalną długość wahadła. Odczytujemy położenie suwaka d_1.
2. Wychylamy wahadło z położenia równowagi o mały kąt ($\alpha \leq 4°$). Puszczamy swobodnie kulkę tak, aby zachować jedną płaszczyznę drgań.
3. Mierzymy za pomocą licznika czas (t_1) trwania n pełnych drgań.
4. Pomiar powtarzamy 3-krotnie.
5. Przesuwamy suwak tak, aby skrócić długość wahadła o 5-10 cm i odczytujemy jego położenie d_2.
6. Mierzymy czas (t_2) trwania n drgań wahadła o zmniejszonej długości.
7. Zgodnie z procedurą opisaną w punktach 4-5 powtarzamy pomiary jeszcze dla dwóch innych położeń suwaka d_3 i d_4.



Rys.1. Matematyczne wahadło różnicowe.

Tabela 1 Liczba drgań wahadła n = ……

Położenie suwaka d [m]	d_1 =	d_2 =	d_3 =	d_4 =
Czas trwania n drgań t [s]				
Średni czas trwania n drgań $t_{śr}$ [s]	$t_{śr1}$=	$t_{śr2}$=	$t_{śr3}$=	$t_{śr4}$=
Okres drgań T [s]	T_1=	T_2 =	T_3 =	T_4 =
T^2 [s^2]	T_1^2 =	T_2^2 =	T_3^2 =	T_4^2 =

Tabela 2

$\Delta l_{ij} = \lvert d_i - d_j \rvert$ [m]	$T_i^2 - T_j^2$ [s^2]	$g_{i,j}$ [m/s^2]	
$\lvert d_1 - d_2 \rvert =$	$T_1^2 - T_2^2$	$g_{12} =$	
$\lvert d_1 - d_3 \rvert =$	$T_1^2 - T_3^2$	$g_{13} =$	
$\lvert d_1 - d_4 \rvert =$	$T_1^2 - T_4^2$	$g_{14} =$	
$\lvert d_2 - d_3 \rvert =$	$T_2^2 - T_3^2$	$g_{23} =$	
$\lvert d_2 - d_4 \rvert =$	$T_2^2 - T_4^2$	$g_{24} =$	
$\lvert d_3 - d_4 \rvert =$	$T_3^2 - T_4^2$	$g_{34} =$	
	Wartość średnia $\bar{g} =$		Zestawienie ($\bar{g} \pm \Delta\bar{g}$) [m/s^2]
	Błąd wartości średniej $\Delta\bar{g} =$		

Opracowanie wyników

1. Na podstawie trzykrotnego pomiaru czasu trwania n drgań wahadła wykonanych dla położenia suwaka w pozycji d_1 obliczamy najpierw średni czas $t_{śr1}$, a następnie okres drgań $T_1 = t_{śr1}/n$ oraz kwadrat okresu drgań wahadła T_1^2 (tabela 1).
2. Podobne obliczenia przeprowadzamy dla pomiarów uzyskanych dla wahadła o zmniejszonej długości przy położeniu suwaka kolejno w pozycjach d_2, d_3 i d_4.
3. Obliczamy różnice długości wahadła ($\Delta l_{ij} = d_i - d_j$) [m] i odpowiadające im różnice kwadratów okresów drgań ($T_i^2 - T_j^2$) [s^2] (tabela 2).
4. Korzystając ze wzoru:

$$g_{i,j} = 4\pi^2 \frac{\Delta l_{i,j}}{T_i^2 - T_j^2}$$

   oraz danych zawartych w tabeli 2, obliczamy przyśpieszenie ziemskie $g_{(ij)}$ na podstawie wszystkich możliwych par wyników pomiaru okresu drgań wahadła (T_i oraz T_j) uzyskanych odpowiednio przy różnych długościach wahadła (d_i oraz d_j) [m].
5. Obliczamy średnią wartość przyśpieszenia ziemskiego $\bar{g}$ [m/s^2].
6. Błąd bezwzględny $\Delta\bar{g}$ obliczamy metodą odchylenia standardowego:

$$\Delta\bar{g} = 3 \cdot SD = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{g} - g_i\right)^2}{N(N-1)}}$$

7. Zestawiamy odpowiednio zaokrąglone wartości średniego przyśpieszenia $\bar{g}$ wraz z błędem $\Delta\bar{g}$, w postaci: ($\bar{g} \pm \Delta\bar{g}$) jedn. SI.