Graficzna analiza wyników

Prawidłowe opracowanie wyników wielu doświadczeń czy pomiarów wymaga wykonania odpowiedniego wykresu. Poniżej odpowiemy na najistotniejsze, związane z tym pytania.

1. Jaki jest cel analizy graficznej?

→ Wykres rozumiany jako zbiór punktów o współrzędnych (x,y) przedstawia zależność wielkości Y od X i charakteryzuje rodzaj tej zależności (np. liniowa, potęgowa, wykładnicza itp.) Może ujawniać zmiany strukturalne np. przejścia fazowe zachodzące w materiale badanym poprzez gwałtowną zmianę charakteru zależności Y od X

→ Pozwala drogą interpolacji odczytywać nieznane wartości parametru Y dla określonych X (lub odwrotnie).

→Weryfikuje dokładność przeprowadzonych pomiarów i zgodność wyników z teorią. Analizując przykładowo przyrost długość sprężyny L poddanej sile rozciągającej F spodziewamy się , że zgodnie z prawem Hooke'a L=A F, a więc punkty o współrzędnych (F, L) powinny tworzyć linię prostą. Jeżeli dla bardzo dużych wartości siły F prosta zaczyna się zaginać do góry znaczy to, że przekroczona została granica sprężystości materiału sprężyny i prawo Hooke'a przestaje obowiązywać a więc liczenie współczynnika A dla tych punktów traci sens.

Jeżeli w granicach stosowalności prawa wszystkie punkty pomiarowe z uwzględnieniem ich niepewności leżą na linii, jeden zaś drastycznie od niej odbiega znaczy to , że w pomiarze tym został popełniony błąd gruby dyskwalifikujący ten pomiar (lub, co mało prawdopodobne odkryliśmy nowe zjawisko).

2. Jak wykonać wykres?

Na układzie współrzędnych definiujemy liniowe osie liczbowe w przedziałach zgodnych z przedziałami zmienności wartości X i Y (osie nie muszą zaczynać się od zera, chyba, że w dalszej analizie konieczne będzie odczytanie wartości Y dla X=0). Wielkość układu dobieramy tak, aby w miarę możliwość jego rozdzielczość pozwalała zaznaczać punkty z taką dokładnością z jaką zostały zmierzone.

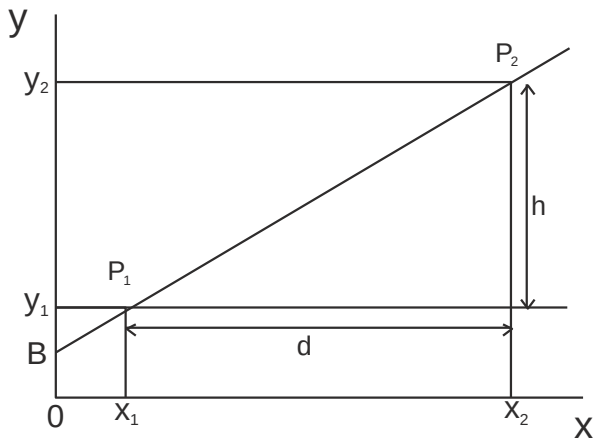
Nanosimy punkty pomiarowe o współrzędnych (x,y) z uwzględnieniem ich niepewności (patrz p.4) i prowadzimy odpowiednią linię (nie może to być linia łamana),tak by przecinała w miarę możliwości punkty pomiarowe, a w przypadku dużych rozrzutów aby ilość punktów poniżej i powyżej linii była zbliżona- w ten sposób uśredniamy graficznie wyniki pomiarów.

3. Jak obliczyć parametry prostej?

Równanie prostej możemy zapisać w postaci y=Ax+B, gdzie A nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a B jest wartością y dla x=0. Aby obliczyć A obieramy na prostej dwa punkty: $P_1(x_1,y_1)$ i $P_2(x_2,y_2)$, a ich współrzędne podstawiamy do wzoru:

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h}{d}$$

Przy czym jednostka parametru A wynika ze stosunku jednostki y do jednostki x.



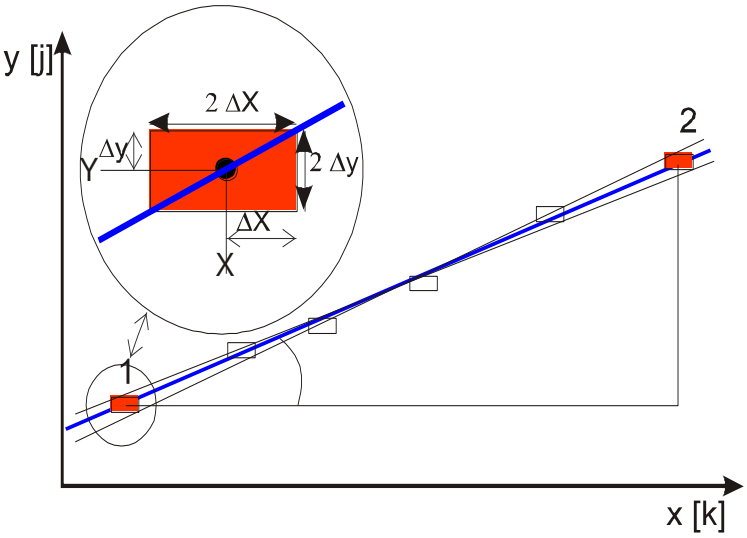
4. Jak przeprowadzić analizę niepewności pomiarowej dla parametrów prostej?

→ Gdy punkty pomiarowe tworzą idealnie linie prostą (jak na rysunku powyżej), wtedy dokładność obliczenia współczynnika A wynika wyłącznie z dokładności odczytu wartości h i d na wykresie. Zgodnie z metodą logarytmiczną rachunku błędu możemy więc napisać:

$$\frac{\Delta A}{A} = \left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|$$

gdzie $h=y_2-y_1$, $d=x_2-x_1$, a Δh i Δd oznaczają błąd odczytu na wykresie długości odcinków h i d ($\Delta h=2\Delta y$ a $\Delta d=2\Delta x$ gdzie Δy i Δx oznaczają błędy pomiarów wielkości x i y)

→ W rzeczywistych pomiarach fizycznych błędy pomiarowe wielkości X i Y sprawiają , że punkty P(x,y) rzadko tworzą idealną prostą. Należy wtedy wielkości tych błędów zilustrować graficznie. Jeżeli każda ze współrzędnych punktu P(x,y) obarczona jest odpowiednio błędem Δx i Δy oznacza to , że współrzędne te mieszczą się w przedziałach ($x-\Delta x$, $x+\Delta x$) oraz ($y-\Delta y$, $y+\Delta y$). Ilustracją tego jest prostokąt błędu z punktem P leżącym w jego środku.



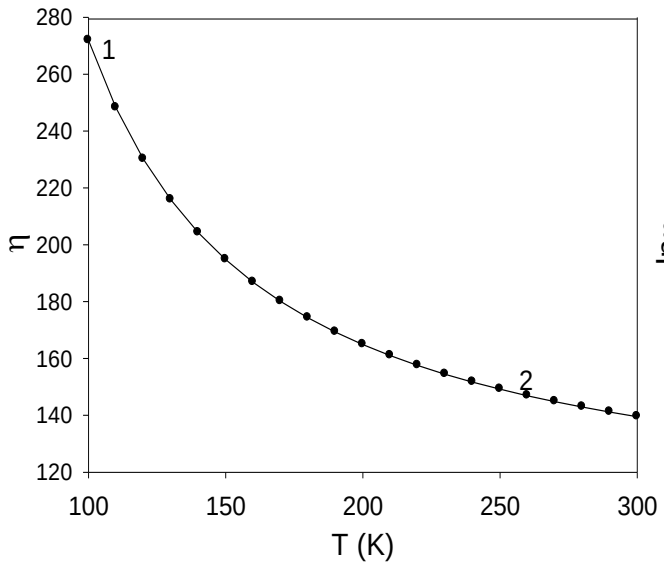
Przez przykładowe prostokąty na powyższym rysunku możemy przeprowadzić prostą przechodzącą możliwie przez ich środki oraz dwie skrajne : o minimalnym i maksymalnym nachyleniu. Współczynnik kierunkowy A tej pierwszej jest wynikiem pomiaru, współczynniki tych skrajnych wyznaczają przedział błędu dla A. Możemy więc przyjąć , że $\Delta A = ½(A' - A'')$, gdzie A" i A'' oznaczają wartości współczynników kierunkowych obliczonych dla dwóch skrajnych prostych.

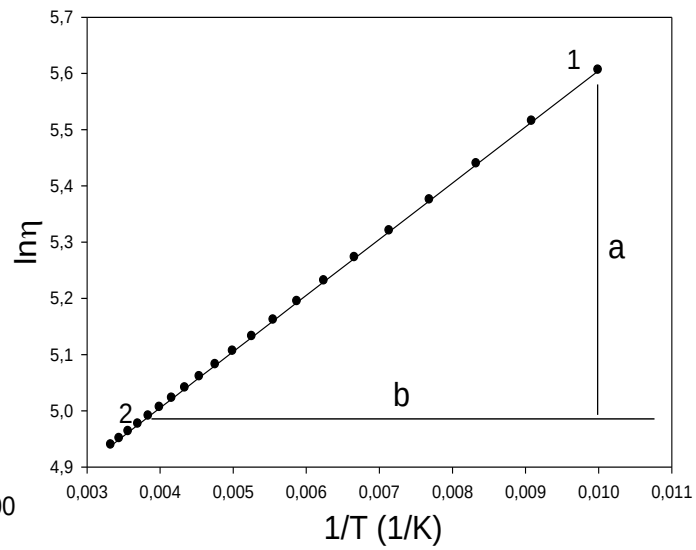
5. *Jak linearyzować linie krzywą?*

W p.1 powiedzieliśmy , że celem analizy graficznej jest między innymi weryfikacja zgodności wyników doświadczenia z teorią. Gdy teoretyczna zależność między wielkościami X i Y opisana jest funkcją liniową weryfikacja ta jest bardzo prosta. Gdy natomiast zależność ta jest inna od liniowej sprawdzenie zgodności doświadczenia z teorią wymaga komputerowego dopasowania punktów doświadczalnych P(x,y) do matematycznie zdefiniowanego wykresu funkcji. Inną drogą jest linearyzacja krzywej, a więc dobrania takiego układu współrzędnych , aby przekształcone wielkości x i y utworzyły linię prostą.

Wyjaśnimy to na przykładzie zależności współczynnika lepkości η od temperatury bezwzględnej T. Opisujemy ją wzorem: $\eta = Ce^{\frac{E}{RT}}$ (E oznacza energie aktywacji , a R jest stałą gazową). Poniżej lewy rysunek przedstawia wykres tej funkcji z zaznaczonymi punktami co 10 stopni. Jeżeli powyższe równanie zlogarytmować obustronnie otrzymamy: $\ln\eta = \ln C + (E/R)\,(1/T)$ czyli postać analogiczną do równania liniowego: y = B + A x

przy czym zmienną niezależną jest *1/T* , a zależną $\ln\eta$. Wykreślając więc $\ln\eta$ w funkcji *1/T* otrzymujemy linie prostą ze współczynnikiem kierunkowym A=*E/R*. Ilustruje to prawy rysunek przy czym zaznaczone punkty uzyskano z tych samych danych co punkty na rysunku lewym.





Wynika z powyższego, że chcąc zbadać zależność współczynnika lepkości η od temperatury i wyznaczyć jej energię aktywacji E, musimy zmierzyć wartość η w różnych temperaturach T, dla każdej pary danych obliczyć wartości (1/T) oraz lnη , oraz sporządzić wykres analogiczny do prawego rysunku powyżej. Dla tak uzyskanej prostej obliczamy jej współczynnik kierunkowy A i dalej zgodnie z poniższym wzorem energię aktywacji E.

$$A = \frac{a}{b} = \frac{\ln\eta_1 - \ln\eta_2}{T_1^{-1} - T_2^{-1}} = \frac{E}{R} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow E = AR$$

6. Jak zastosować program komputerowy do obróbki danych?

Analizę danych doświadczalnych łącznie z edycją wykresu można przeprowadzić za pomocą specjalnego programu komputerowego. Program taki jest dostępny w Studenckiej Pracowni Fizycznej UP. Przedstawia on na wykresie punkty o współrzędnych x y (x to zmienna niezależna czyli odcięta punktu, oznaczona na osi poziomej; y to zmienna zależna, rzędna punktu, oznaczona na osi pionowej) oraz oblicza metodą najmniejszych kwadratów parametry A i B a także ich błędy (ΔA,ΔB) dla prostej najlepiej dopasowanej do wprowadzonych danych xy. Prosta ta również przedstawiona jest na układzie współrzędnych. O jakości dopasowania, czyli zgodności punktów pomiarowych z wyznaczoną prosta świadczy współczynnik korelacji r. Im bliższa jedności jest jego wartość tym lepsze jest dopasowanie. r=1 gdy wszystkie punkty leżą idealnie na prostej.

Korzystanie z programu sprowadza się do wprowadzenia danych: wprowadzamy pary współrzędnych niezależną x i zależną y, program tworzy z nich dwie kolumny. Po wprowadzeniu danych program oblicza omawiane wyżej parametry prostej.

Program umożliwia również transformacje danych, możemy przykładowo dla wszystkich wartości z wybranej kolumny obliczyć ich kwadraty (x^2 lub y^2), iloczyny z dowolną stała liczbą, logarytmy naturalne (lnx lub lny), odwrotności (1/x lub 1/y). Jest to procedura pomocna w przypadku linearyzacji zależności nieliniowych (porównaj p.5). W opisanym w p 5 przykładzie postępujemy następująco wprowadzamy temperaturę bezwzględną T jako x a współczynnik lepkości η jako y. Dokonujemy transformacji danych: 1/x oraz lny. Mamy więc w pierwszej kolumnie odwrotność T a w drugiej lnη. Uruchamiamy obliczenia i edycję wykresu. Program prezentuje wykres analogiczny do przedstawionego wyżej na prawym rysunku oraz współczynnik kierunkowy A i jego błąd. Energię aktywacji obliczamy podobnie jak to omawialiśmy w p.5.