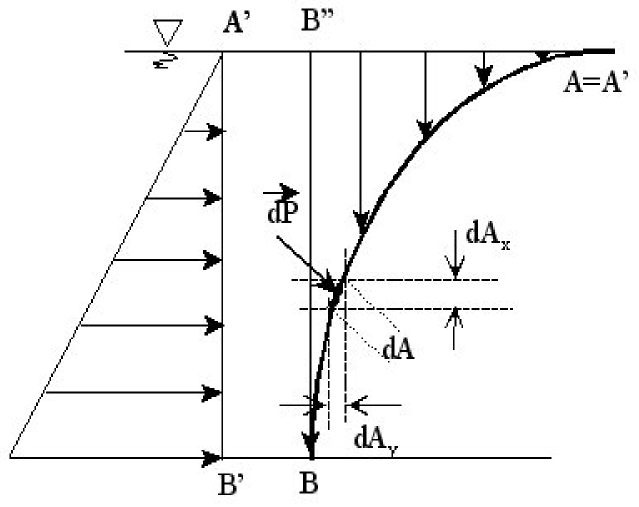
WYKŁAD 2

2.3. Parcie na ściankę zakrzywioną

Parciem cieczy na dowolną zakrzywiona powierzchnie jest geometryczna suma par elementarnych. Obliczenie tego parcia polega na wyznaczeniu jego składowych, jako rzutów na osie przyjętego układu współrzędnych.



Rys. 8. Elementarne parcie wody

Na ściankę działa ciśnienie zewnętrzne p_0 (ponad lustrem cieczy) oraz ciśnienie hydrostatyczne

$$p = p_0 + h\rho g$$

Parcie elementarne na element powierzchni dA rozpatrywanej ścianki wynosi

$$dP = pdA = (p_0 + h\rho g)dA$$

Jeżeli kąt nachylenia parcia elementarnego względem pionu jest równy α, to składowe parcia elementarnego wyniosą

$$dP_x = |dP| \cdot \sin\alpha = pdA\sin\alpha = pdA_x$$

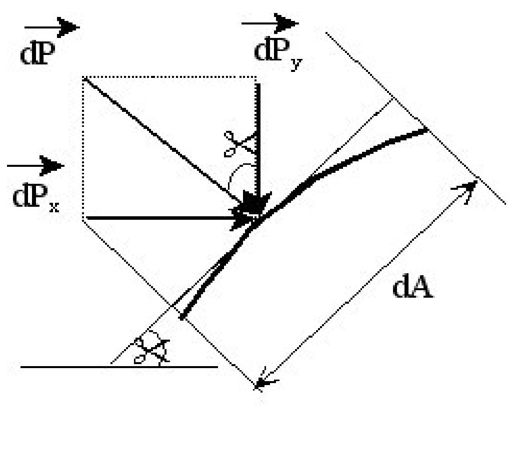
$$dP_y = |dP| \cdot \cos\alpha = pdA\cos\alpha = pdA_y$$

gdzie dA_x oraz dA_y rzuty powierzchni elementarnej dA na powierzchnię pionową (prostopadłą do osi x) i powierzchnię poziomą (prostopadłą do osi y) a dP_x i dP_y - składowe pozioma i pionowa parć elementarnych (ciśnień składowych).

$$P_x = \int_{A_x} pdA_x = p_0 A_x + \rho g \int_{A_x} h dA_x$$

(16)

$$P_y = \int_{A_y} pdA_y = p_0 A_y + \rho g \int_{A_y} h dA_y$$



Rys. 9. wykres ciśnień składowych na ściankę zakrzywioną

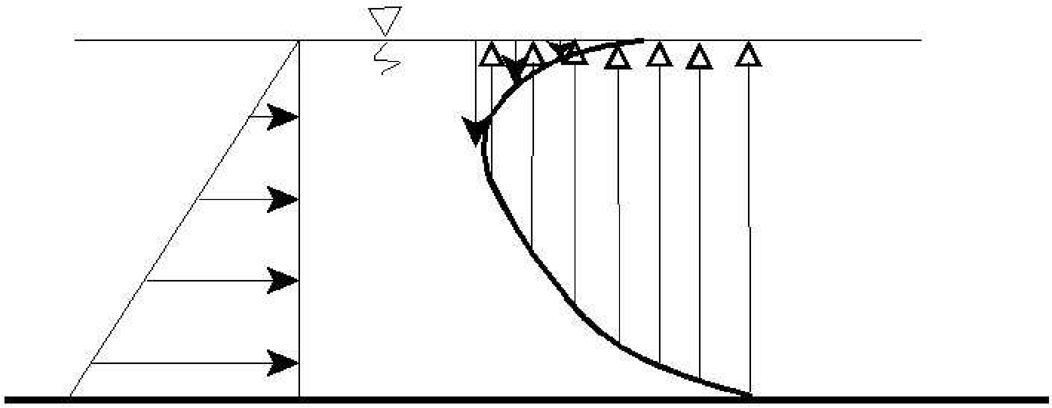
Równania (16) wykazują, że składowe parcia na ściankę zakrzywioną można wyliczyć jako objętość wykresów ciśnień składowych.

Moduł wypadkowej parcia wylicza się z zależności:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \tag{17a}$$

natomiast kierunek działania siły parcia P określa kąt nachylenia wypadkowej do pionu obliczamy z zależności:

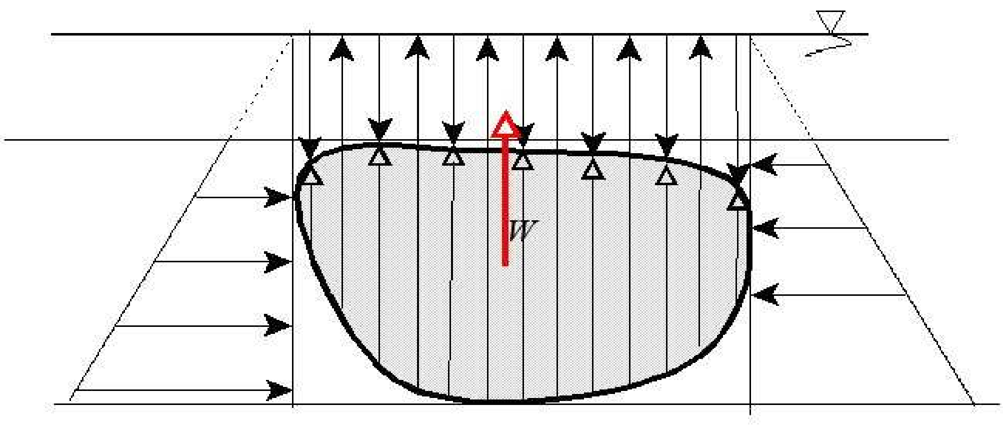
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{P_x}{P_y} \tag{17b}$$



Rys. 10. Przykład parcia na ściankę zakrzywioną

2.4. Wypór. Prawo Archimedesa

Na ciało całkowicie zanurzone w cieczy działa ciśnienie cieczy na całej powierzchni tego ciała, przy czym wartość ciśnienia zależy od zagłębienia danego punktu poniżej swobodnego zwierciadła wody.



Rys. 11. Wypór na ciało całkowicie zanurzone

Na rys.11 pokazano wykresy składowych ciśnień z których wynika że składowe poziome wzajemnie się redukują stąd sumaryczna składowa pozioma wynosi 0.

Sumując składową pionową działając na górną powierzchnię zanurzonego ciała i składową przeciwnie skierowaną, działając na dolną powierzchnię otrzymujemy w wyniku

$$W = (P_y)_d - (P_y)_g = \int_A \rho g h_d \, dA_y - \int_A \rho g h_g \, dA_y = \rho g V \tag{18}$$

gdzie *W* jest wypadkową parcia, pionowo skierowaną w górę, zwaną **wyporem**; *V* - jest objętością zanurzonej bryły równą wypartej cieczy objętości wypartej cieczy, ρ - gęstość cieczy.

Wyrażenie to znane jest jako **prawo Archimedesa**, które brzmi:

ciało zanurzone w cieczy traci pozornie na wadze tyle, ile waży wyparta przez nie ciecz, czyli

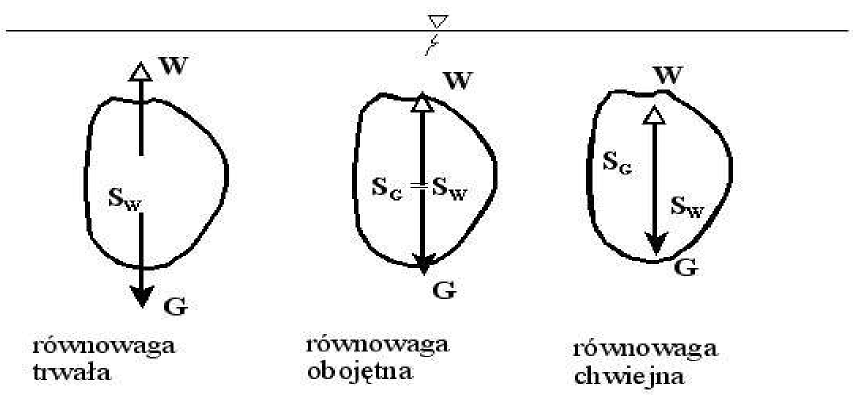
$$W = \rho\, g V \tag{19}$$

2.5. Równowaga ciał zanurzonych

Na dowolne całkowicie zanurzone w cieczy ciało działają dwie przeciwnie skierowane siły: ciężar ciała *G*, zaczepiony w środku ciężkości $\mathbf{S_G}$ i wypór *W*, który zaczepiony jest w środku ciężkości zanurzonego ciała $\mathbf{S_W}$, zwanego środkiem wyporu. Między tymi siłami mogą zachodzić zależności

- gdy $G = W$, ciało pozostaje w zanurzeniu, nie zmieniając głębokości swego położenia,
- gdy $G > W$, ciało tonie opadając na dno,
- gdy $G < W$, ciało wynurza się częściowo z wody i przyjmuje takie położenie, przy którym wypór części zanurzonej zrównoważy się z ciężarem całego ciała.

Ciało zanurzone w cieczy może znajdować się w zależności od wzajemnego położenia względem siebie środka ciężkości $\mathbf{S_G}$ i środka wyporu $\mathbf{S_W}$ w stanie równowagi stałej, chwiejnej lub obojętnej.

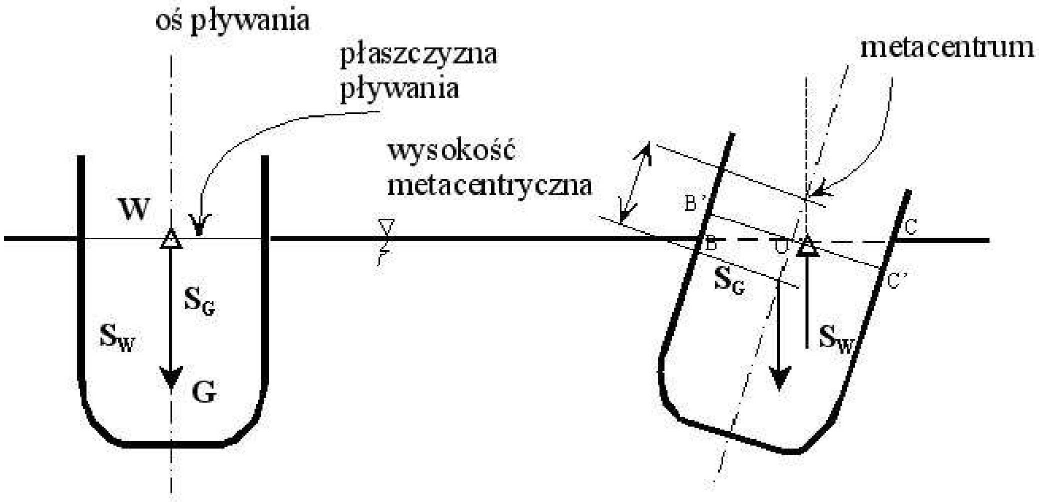


Rys. 12. Równowaga trwała, chwiejna i obojętna

Równowaga stała (trwała) występuje wówczas, gdy środek ciężkości $\mathbf{S_G}$ leży poniżej środka wyporu $\mathbf{S_W}$, na jednej prostej. Niewielkie wychylenie ciała z tego położenia powoduje jego obrót i powrót do położenia pierwotnego, na skutek powstającego momentu sił. Jeżeli $\mathbf{S_G}$ leży powyżej $\mathbf{S_W}$, powstaje stan równowagi chwiejnej, natomiast gdy **Sw** i $\mathbf{S_G}$ leżą w tym samym punkcie, w stanie równowagi obojętnej.

2.6. Równowaga ciał pływających (częściowo zanurzonych)

Ciało pływające, częściowo zanurzone w cieczy pozostaje pod działaniem dwóch sił: siły wyporu *W* i siły wynikającej z ciężaru własnego *G*. Warunki równowagi ciała pływającego są odmienne niż warunki dla ciała zanurzonego, np. ciało pływające może pozostać w stanie równowagi wówczas, gdy $\mathbf{S_G}$ leży powyżej $\mathbf{S_W}$. Równowaga trwała zachodzi wówczas, gdy ciało wychylone pod wpływem chwilowej siły zewnętrznej powróci do pierwotnego stanu równowagi.



Rys. 13. Ciało częściowo zanurzone

Dla ciał pływających, ze względu na ich stateczność, najbardziej niebezpieczne są obroty względem osi poziomej. Na rysunku przedstawiono zarys przekroju poprzecznego statku wychylonego z położenia równowagi, poprzez obrót o mały kąt φ, względem podłużnej osi y przechodzącej przez punkt **O** prostopadle do płaszczyzny rysunku. W stanie równowagi siły *W* i *G* zaczepione w punktach odpowiednio $\mathbf{S_W}$ i $\mathbf{S_G}$ działały pionowo wzdłuż *osi pływania*, natomiast zwierciadło wody leży w płaszczyźnie *xy*. Wskutek obrotu wynurza się z wody klin **OBB**', zanurza się zaś **OCC'**. Objętości obu klinów są sobie równe. Wartość wyporu nie zmienia się, natomiast środek wyporu zmieni swoje położenie i przesunie się do punktu $\mathbf{S_W}$**'**. Środek ciężkości nie zmieni swojego położenia. Wypór *W* = *W'* działając ze środka wyporu $\mathbf{S_W}$**'** przetnie oś pływania w punkcie

M, nazywanym metacentrum. Odcinek między punktami **M** i $\mathbf{S_W}$ nazywamy wysokością metacentryczną (*m*), natomiast odcinek między środkiem ciężkości i środkiem wyporu w stanie równowagi wynosi *a*.

Wysokość metacentryczna jest miarą stateczności obiektu pływającego i można j obliczy ze wzoru

$$m = \frac{J}{V_z} - a \tag{20}$$

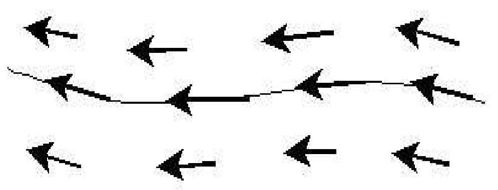
gdzie: J - moment bezwładności pola pływania względem osi obrotu, V_z – objętość części zanurzonej. Gdy m > 0 statek mimo wychylenia, pod wpływem działania siły wyporu powróci do poprzedniego położenia czyli zachowa stateczność.

3. HYDRODYNAMIKA

Hydrodynamika zajmuje się badaniem zjawisk zachodzących w cieczy podczas ruchu. Wyniki badań tych zjawisk ujęte w postaci równań matematycznych i wzorów doświadczalnych informują nas o przyczynach ruchu i zależnościach zachodzących między jego elementami.

3.1. Wielkości hydrodynamiczne

Wielkości charakteryzujące właściwości cieczy, takie jak gęstość ρ, lepkość μ także wielkości charakteryzujące stan i ruch cieczy, takie jak ciśnienie p i prędkość cieczy *v* nazywamy parametrami hydrodynamicznymi. Wielkości te mogą się zmieniać w zależności od położenia w przestrzeni i mogą być zmienne w czasie. Inaczej mówiąc wielkości te opisane są funkcją położenia i czasu czyli ***f****(x, y, z, t)*. Ruch, w którym wielkości hydrodynamiczne nie zmieniają się w czasie a zależę jedynie od położenia, czyli opisane są funkcją ***f****(x, y, z)* nazywamy ruchem ustalonym (trwałym).

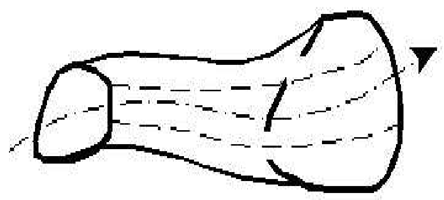


Rys. 14. Linie prądu

Tor cząsteczki (elementu płynu) - linia, którą zakreśla cząsteczka poruszając się w przestrzeni i w czasie

Linia prądu - wektory prędkości wszystkich cząsteczek położonych na linii prądu są w danej chwili do tej linii styczne. Linie prądu nie mogą się krzyżować.

Strugą cieczy - nazywamy zbiór linii prądu przechodzących prostopadle przez wszystkie punkty elementy pola *dA*. Linie prądu przechodzące przez kontur pola *dA* tworzą rurkę prądu.

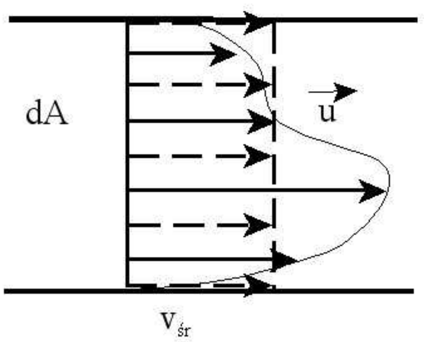


Rys. 15. Struga cieczy

Strumień cieczy jest pojęciem określającym wszystkie strugi cieczy przechodzące przez dowolnie wyodrębnioną powierzchni przekroju poprzecznego *A* cieczy, prostopadłą do wszystkich linii prądu.

Przekrój poprzeczny strugi, strumienia *A* - pole powierzchni prostopadłej do wektorów prędkości.

Wydatkiem (natężeniem przepływu) nazywamy objętość cieczy przechodzącej przez przekrój czynny w jednostce czasu.



Rys. 16. Rozkład prędkości w pionie kanału otwartego

$$[Q] = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{T}} \qquad \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \qquad \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$$

$$dQ = u\,dA$$

$$Q = \int_A u\,dA$$

Prędkość średnia

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u\,dA}{A} \tag{21}$$

3.2. Równanie ciągłości dla strumienia cieczy

$$\int \rho u\,dA = const$$

u - prostopadła do δA

1. Boczne ścianki **AB** są ograniczone liniami strug - nie przepływa przez nie ciecz.
2. Ciecz jest nie ściśliwa ρ = const.
3. Strumień jest ciągły - cała przestrzeń wypełniona cieczą, stąd

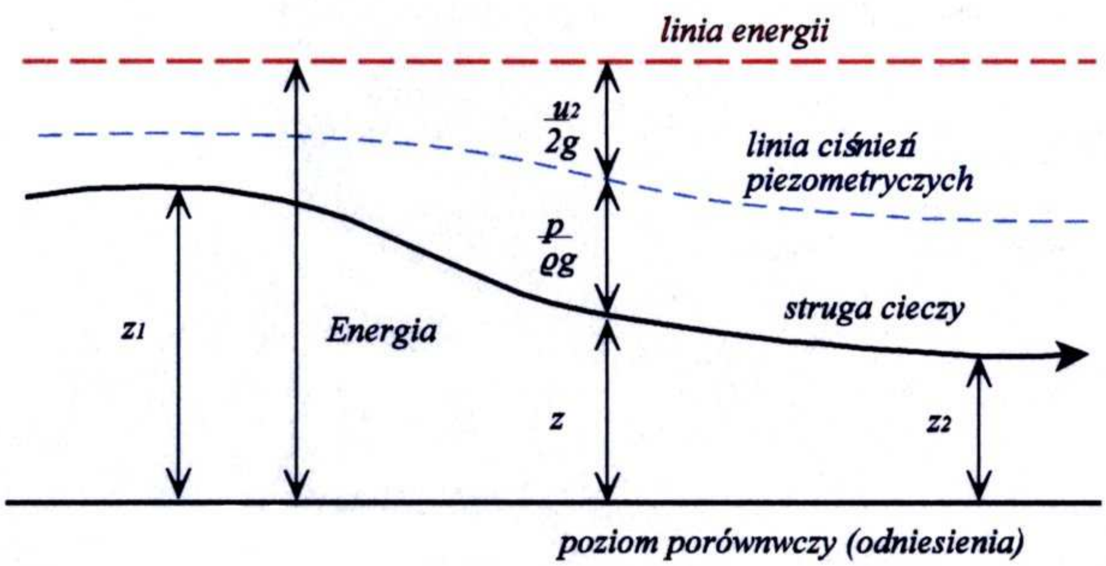
$$Q = vA = const \qquad v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 \;...$$

3.3. Równanie Bernoulli'ego

Wyodrębniana elementarna objętość cieczy *dV* o gęstości ρ czyli o elementarnej masie *dm* posiada określoną energię, która może występować jako energia potencjalna $dm \cdot g \cdot z$ w zależności od wysokości położenia *z*, jako energia ciśnienia $dv \cdot p$ i jako energia kinetyczna zależna od $dm \cdot u^2 /2$. Zgodnie z prawem zachowania energii całkowita suma energii wyodrębnionej masy cieczy winna być stała, niezależnie od położenia tej masy w przestrzeni. Ta zasada zachowania energii wyrażana jest w postaci równania Bernoulli'ego:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \tag{22}$$

Równanie to wyrażające sumę energii wyodrębnionej masy cieczy zostało uzyskane poprzez podzielenie wyżej podanych różnych postaci energii przez tę masę $dm = dv \cdot \rho$.



Rys. 17. Geometryczna interpretacja równania Bernoulli'ego

Wszystkie wielkości w równaniu (22) mają wymiar długości i stąd nazywamy je "wysokościami energii":

z - wysokość położenia, tj. wysokość wzniesienia środka określonego przekroju poprzecznego strugi cieczy ponad przyjęty poziom odniesienia [m]

$\frac{p}{\rho g}$ - wysokość ciśnienia tj. wysokość wzniesienia takiego słupa cieczy, która na podstawę wywiera ciśnienie p

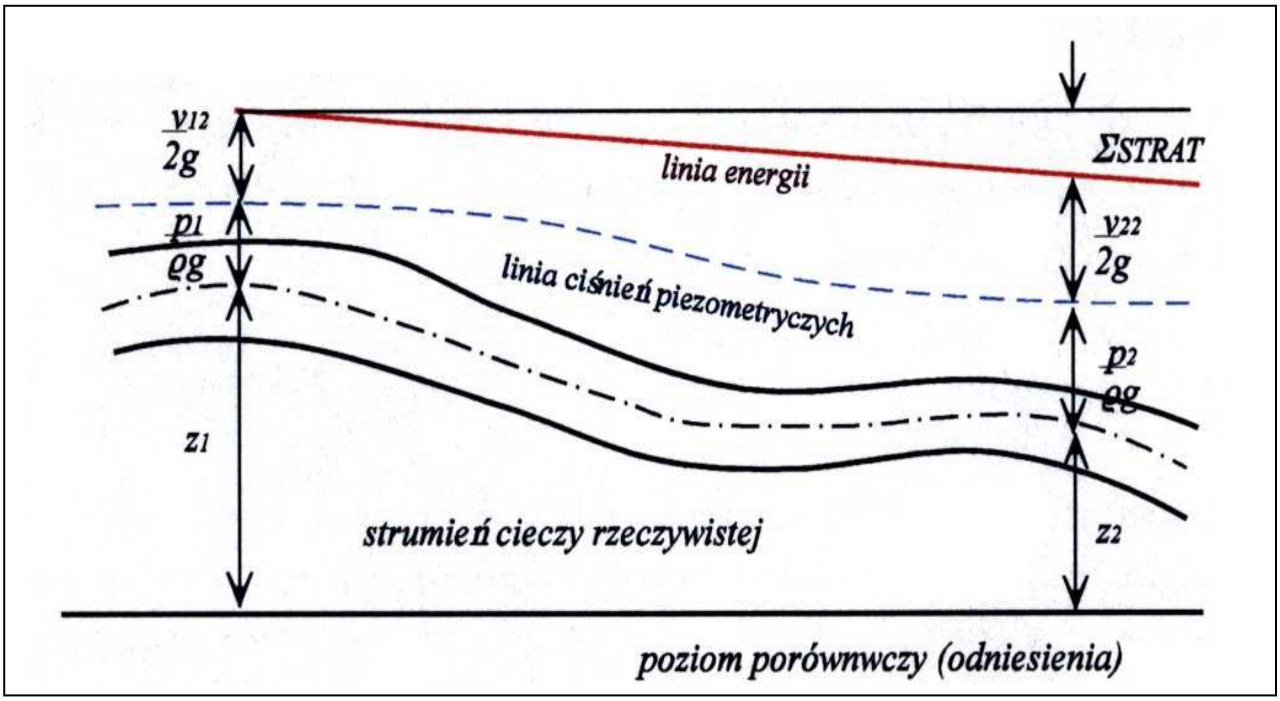
$$\left[\frac{N}{m^2} \cdot \left(\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \right)^{-1} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^2} \cdot \frac{m^3 \cdot s^2}{kg \cdot m} = m \right]$$

$\frac{u^2}{2g}$ - wysokość prędkości tj. wysokość, z której ciecz musiałaby swobodnie spadać, aby osiągnąć prędkość końcową *u*.

$$\left[\frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{m^{-1}}{s^{-2}}=\frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{s^2}{m}=m\right]$$

W przypadku cieczy rzeczywistej część energii, jaką struga przepływająca między dowolnie obranymi przekrojami jest zużywana na pokonanie oporów ruchu wywołanych głównie lepkością cieczy, szorstkością ścian przewodu itp. Aby równanie Bernoulli'ego i w tym przypadku mogło być słuszne, do prawej strony równania należy dodać pewną wysokość h_{str} obrazującą straty energetyczne (lub sumę tych start) zużyte na pokonanie wyżej wymienionych oporów. W związku z tym dla strugi cieczy rzeczywistej równanie Bernoulli'ego przyjmuje postać.

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{\alpha v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\sum h_{str} \tag{23}$$



Współczynnik α (α ≥ 1) zwany współczynnikiem Saint-Venanta (lub Coriolisa) wyraża stosunek sumy energii kinetycznej strug elementarnych do energii kinetycznej całego strumienia, obliczonej na podstawie wartości prędkości średnich.

$$\alpha=\frac{\int\limits_A u^3 dA}{v_{sr}^3\cdot A} \tag{24}$$