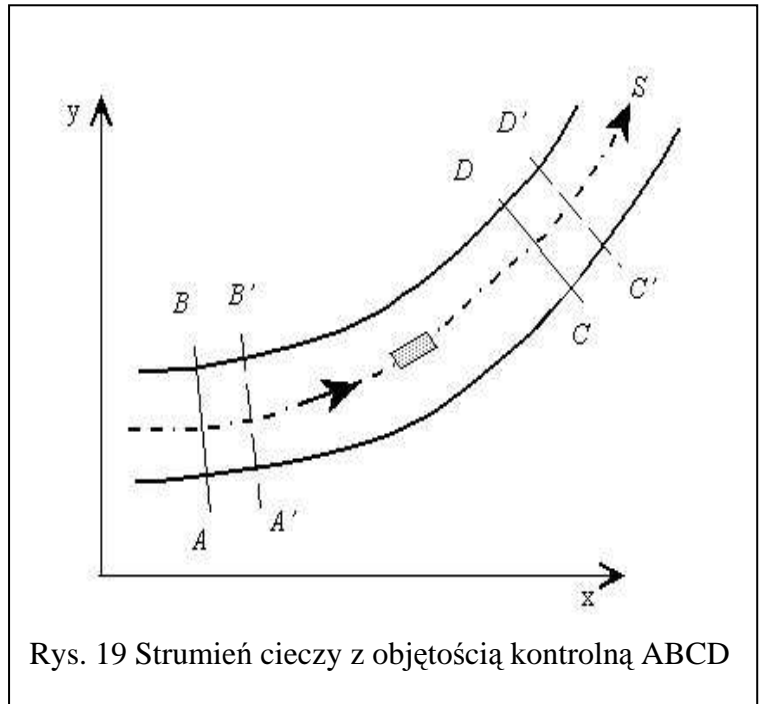


## WYKŁAD 3

## 3.4. Podstawowe prawa hydrodynamiki

W analizie problemów przepływów cieczy wykorzystuje się trzy podstawowe prawa fizyki klasycznej: prawo zachowania masy, zachowania pędu i zachowania energii. W większości przypadków wystarczające jest sformułowanie tych praw dla przepływu jednowymiarowego i dla cieczy nieściśliwej.

W szczegółowych rozważaniach rozpatruje się ściśle określoną objętość kontrolną, ograniczoną umownymi powierzchniami kontrolnymi. Taką objętością kontrolną rozpatrywanego strumienia cieczy jest objętość zawarta w przestrzeni ABCD, gdzie linie AC i BD są liniami strug a powierzchnie AB i CD są przekrojami poprzecznymi, powierzchniami prostopadłymi do wektorów prędkości (Rys. 19). Natężeniem strumienia masy, pędu lub energii nazywamy tak ilość danej wielkości, która przechodzi przez przekrój kontrolny w jednostce czasu.



Rys. 19 Strumień cieczy z objętością kontrolną ABCD

**Natężenie strumienia masy** jest definiowane jako

$$\dot{m} = \int_A \rho u \, dA = \rho v A = \rho Q \quad (25)$$

gdzie  $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ ,  $u$  jest prędkością zmienną w danym przekroju a  $v$  prędkością średnią dla całego przekroju.

**Natężenie strumienia pędu** można wyrazić jako

$$\dot{m} \beta \vec{v} = \int_A \rho \vec{u} u \cdot dA = \rho \beta Q \vec{v} \quad (26)$$

Współczynnik poprawkowy  $\beta$ , zwany współczynnikiem **Boussinesqa** (dla ruchu w pełni burzliwego jest bardzo bliski jedności). W odróżnieniu od poprzedniej wielkości, Natężenie

strumienia pędu jest wielkością wektorową, gdzie istotną jest nie tylko ilość (moduł) ale także położenie i kierunek tej wielkości.

**Natężenie strumienia energii mechanicznej** określa się wyrażeniem

$$\dot{m} g H = \dot{m} g \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \int_A \rho g \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) u dA \quad (27)$$

gdzie  $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$  jest tzw. całkowitą wysokością energii nad przyjęty poziom odniesienia.

### 3.5. Równanie ciągłości

Prawo zachowania masy określa, że zmiana w czasie masy danej kontrolowanej objętości musi być zrównoważona różnicą masy wpływającej (in) i wypływającej (out) przez powierzchnię kontrolną .

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho dV = (\sum \rho v A)_{in} - (\sum \rho v A)_{out}$$

gdzie  $dV$  - elementarna objętość,  $V_k$  - objętość kontrolowana.

Dla ruchu ustalonego i cieczy nieściśliwej ( $\rho = \text{const.}$ ) równanie to upraszcza się do postaci zwanego **równaniem ciągłości**:

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = (vA)_{in} = (vA)_{out} \quad (28)$$

gdzie  $v_1$  i  $A_1$  prędkość średnia i pole przekroju strumienia wpływającego oraz odpowiednio  $v_2$  i  $A_2$  prędkość i pole przekroju strumienia wypływającego. Ilustrację tego prawa przedstawiono na rys. 19. Cząsteczki cieczy znajdujące się w przekroju **AB** w jednostce czasu przemieszczają się do przekroju **A'B'** i analogicznie z przekroju **CD** przemieszczają się do przekroju **C'D'**, stąd

$$\sum_{AB} \delta m = \sum_{C'D'} \delta m$$

gdzie  $\delta m$  jest elementarną masą wewnątrz objętości kontrolowanej.

### 3.6. Równanie ilości ruchu

Zgodnie z drugą zasadą Newtona, zmiana pędu  $mu$  jest proporcjonalna do przyłożonej siły

$$\frac{d(m \vec{u})}{dt} = \vec{F} \quad (29a)$$

Dla ośrodka płynnego, ciągłego, możemy napisać

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int \vec{u} dm \quad (29b)$$

gdzie  $F$  siły zewnętrzne wywołujące zmiany pędu,  $dm$  - elementarna masa cieczy,  $u$  jej prędkość .

Możemy napisać, że zmiana w czasie pędu objętości kontrolowanej ( $V_k$ ) jest równa sumie wszystkich strumieni pędów przepływających przez powierzchnię kontrolną plus suma wszystkich sił działających na objętość kontrolowaną czyli

$$\frac{d}{dt} \int_{kV} \rho \vec{u} dV = \sum \left( \frac{dm \vec{u}}{dt} \right)_{in} - \sum \left( \frac{dm \vec{u}}{dt} \right)_{out} + \sum F$$

Dla ruchu ustalonego, gdy  $\frac{dm}{dt} = \left( \frac{dm}{dt} \right)_{in} = \left( \frac{dm}{dt} \right)_{out}$  powyższe równanie sprowadza się do

postaci

$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt} [\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}] \quad (30)$$

Rozpatrzmy strumień cieczy przedstawiony na rysunku 19 z wyodrębnioną masą cieczy zawartą między przekrojami poprzecznymi **AB** i **CD** oraz elementarną masą cieczy  $m$ . Ilość ruchu cieczy zawartej między rozpatrywanymi przekrojami w chwili początkowej będzie sumą wektorową pędów elementarnych, czyli

$$\sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m$$

Po czasie  $\delta t$  ilość ruchu wyodrębnionej masy cieczy wyniesie

$$\sum_{A'B'}^{C'D'} \vec{u} \delta m = \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m - \sum_{AB}^{A'B'} \vec{u} \delta m + \sum_{CD}^{C'D'} \vec{u} \delta m$$

Przyrost ilości ruchu wywołany sumą wektorową wszystkich sił zewnętrznych działających na rozpatrywaną ciecz wyniesie

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} \delta t &= \left( \sum_{A'B'}^{C'D'} \vec{u} \delta m \right)_{(po \delta t)} - \left( \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m \right)_{(przed \delta t)} = \\ &= \left( \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m - \sum_{AB}^{A'B'} \vec{u} \delta m + \sum_{CD}^{C'D'} \vec{u} \delta m \right)_{(po \delta t)} - \left( \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m \right)_{(przed \delta t)} = \\ &= \left( \sum_{CD}^{C'D'} \vec{u} \delta m - \sum_{AB}^{A'B'} \vec{u} \delta m \right)_{(po \delta t)} \end{aligned} \quad (31)$$

ponieważ przyjmuje się, że zachodzi równość

$$\left( \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m \right)_{(po \delta t)} = \left( \sum_{AB}^{CD} \vec{u} \delta m \right)_{(przed \delta t)}$$

Dla bardzo małego  $\delta t$ , odległości  $AA'$  i  $BB'$  są bardzo małe, stąd prędkości  $u$  dla wszystkich cząstek przestrzeni  $ABA'B'$  są te same, podobnie jak dla przestrzeni  $CDC'D'$ . Ponieważ prędkości w wymienionych obszarach sumowania są stałe choć dla każdego z nich mogą być różne, możemy je wyciągnąć przed znak sumy:

$$\sum \vec{F} \cdot \delta t = \vec{u}_2 \sum_{DC}^{D'C'} \delta m - \vec{u}_1 \sum_{AB}^{A'B'} \delta m \quad (32)$$

Masa cieczy wyrażona jako suma po obszarze  $DCD'C'$  jest masą cieczy, która przeszła przez przekrój  $CD$  w czasie  $\delta t$  i dlatego może być określona jako  $\rho Q \delta t$ . Przy tych przyjęciach dla ruchu ustalonego możemy napisać:

$$\sum_{DC}^{D'C'} \delta m = \sum_{AB}^{A'B'} \delta m = \rho Q \delta t$$

Zakładając, że wyprowadzone równanie (32) ważne jest także dla strumienia cieczy, w powyższym równaniu możemy przyjąć prędkości średnie w przekroju  $v_{sr} = Q/A$  a dzieląc obie strony równania przez  $\delta t$  otrzymamy ostatecznie

$$\sum \vec{F} = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (33)$$

gdzie  $v_1$  oraz  $v_2$  oznaczają prędkości średnie odpowiednio w przekrojach  $AB$  o polu  $A_1$  i  $CD$  o polu  $A_2$ . Równanie (33) wyraża **zmiany ilości ruchu strumienia cieczy między tymi przekrojami pod wpływem działania sił zewnętrznych określonych jako  $\sum F$** . Równanie to jest praktycznym wyrażeniem równania (30).

### 3.7. Równanie Bernoulliego dla strumienia cieczy rzeczywistej

Prawo zachowania energii wywodzi się z pierwszej zasady termodynamiki, które głosi, że przyrost energii wewnętrznej  $\Delta U$  w dowolnym procesie jest równy różnicy ciepła  $Q$  doprowadzonego do układu oraz pracy  $L$  wykonanej przez układ w czasie tego procesu:

$$\Delta U = Q - L.$$

Przy pominięciu przepływu ciepła, zasada ta może być wyrażona za pomocą natężenia strumienia energii mechanicznej

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho \left( \frac{u^2}{2} + gz \right) dV = \sum \frac{d}{dt} (\dot{m}gH)_{in} - \sum \frac{d}{dt} (\dot{m}gH)_{out} - \sum L - \sum \dot{m}gh_s \quad (34)$$

gdzie  $L$  - jest pracą maszyn takich jak pompy i turbiny a  $h_s \geq 0$  wysokość strat energii na pokonanie oporów ruchu strumienia, odniesiona do jednostki ciężaru cieczy. W skrótowym zapisie równanie powyższe można przedstawić w następującej postaci

$$H_{in} + H_p = H_{out} + H_t + h_s$$

gdzie  $H_p$  i  $H_t$  przedstawia odpowiednią wysokość energii odniesioną do jednostki ciężaru cieczy dostarczonej przez pompy lub odprowadzonej przez turbiny.

W praktyce stosuje się to równanie w postaci

$$\left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_1 + H_p = \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_2 + H_t + h_s \quad (35)$$

zwane często uogólnioną postacią równania Bernoulliego.

### 3.8. Reakcja hydrodynamiczna i parcie hydrodynamiczne

Zgodnie z trzecią zasadą Newtona, siła oddziaływania cieczy na otaczające ścianki będzie się nazywała reakcją hydrodynamiczną i będzie miała zwrot przeciwny czyli

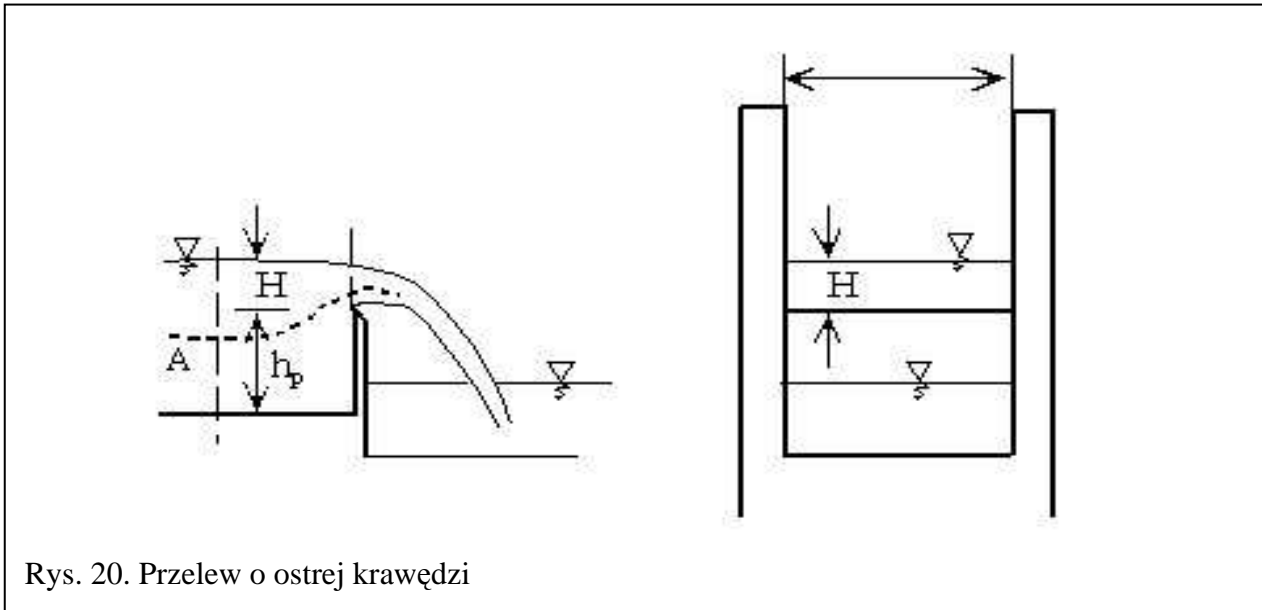
$$\vec{R} = -\sum \vec{F}$$

Uwzględniając zależność określoną powyżej, równanie pozwalające wyznaczyć wartość reakcji hydrodynamicznej jest następujące

$$\vec{R} = \rho Q (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (36)$$

Jest to wyrażenie podane w zapisie wektorowym, gdzie  $v_1$  i  $v_2$  są wektorami prędkości średnich w początkowym i końcowym przekroju poprzecznym strumienia - prawa strona równania jest zmianą ilości ruchu (pędu) masy strumienia ograniczonego tymi przekrojami, ze znakiem przeciwnym.

W przypadkach dotyczących oddziaływania swobodnego strumienia cieczy, w którym następuje zmiana ilości ruchu pod wpływem działania przeszkody znajdującej się na drodze strumienia, oddziaływanie strumienia na przeszkodę będziemy nazywać parciem hydrodynamicznym i określać symbolem  $P$ . Przy założeniu, że pomijamy działanie siły ciężkości oraz pomijamy opory ruchu (zakładamy przepływ cieczy idealnej) parcie hydrodynamiczne możemy wyznaczyć wprost z wzoru (36)).



Rys. 20. Przelew o ostrej krawędzi

**Przykład 3.1. Przelew prostokątny o ostrej krawędzi.**

Przelew o ostrej krawędzi (rys. 20) jest stosowany zwykle do pomiaru wydatku w kanałach otwartych poprzez prosty pomiar poziomu zwierciadła wody powyżej przelewu. Jest to ciężka płyta ustawiona w poprzek kanału, powyżej której przelewa się woda swobodnym strumieniem, w pełni napowietrzonym, tzn. wewnątrz którego ciśnienie równe jest ciśnieniu atmosferycznemu.

Rozwiązanie. Rozpatrywana objętość kontrolna strumienia zawarta jest między przekrojami poprzecznymi 1 i 2, dla której z równania ciągłości wynika, że  $Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$ . Przekrój 1 jest przyjęty w takiej odległości, aby strugi były równoległe, dzięki czemu w przekroju tym występuje hydrostatyczny rozkład ciśnień. Stąd wysokość ciśnienia piezometrycznego w przekroju 1 jest stała,

$$\left( z + \frac{p}{\rho g} \right) = p + h$$

przy poziomie porównawczym przyjętym na poziomie dna kanału. Równanie Bernoulliego dla strugi przechodzącej przez punkt **A** w przekroju 1 i punkt **B** w przekroju 2 otrzymuje postać

$$h + P = \left( \frac{p}{\rho g} + z \right)_B + \frac{u_B^2}{2g}$$

Zgodnie z wyżej przyjętym założeniem  $p \approx 0$  w każdym punkcie przekroju 2, tak więc z powyższego równania otrzymujemy  $u_B = \sqrt{2g(h + P) - z}$ . Przy założeniu, że w przekroju przelewu jest ruch jednostajny, wydatek przelewu wynosi

$$Q = \int_P^{h+P} u_B(z) dA = \int_P^{h+P} \sqrt{2g(h + P - z)} b \cdot dz$$

Górna granica całkowania nie uwzględnia depresji zwierciadła wody w przelewie. Końcowa zależność ma postać

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2 g h^3}$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem wydatku, uwzględniającym straty hydrauliczne i uproszczenia przyjęte w założeniach do obliczeń.

**Przykład 3.2. Reakcja hydrodynamiczna w kolanie rurociągu.**

Pionowy odcinek rurociągu należy zakotwiczyć w bloku oporowym. Ciśnienia cieczy na wejściu i wyjściu z kolana wynoszą odpowiednio  $p_1$  i  $p_2$ , w rurociągu odbywa się przepływ ustalony  $Q > vA$ , gdzie  $A$  - pole przekroju poprzecznego rurociągu. Ciężar kolana  $G_k$  a ciężar wody w kolanie  $G_w$ . Obliczyć całkowitą siłę oddziaływania kolana na blok oporowy przy uwzględnieniu także reakcji hydrodynamicznej cieczy przepływającej przez rurociąg.

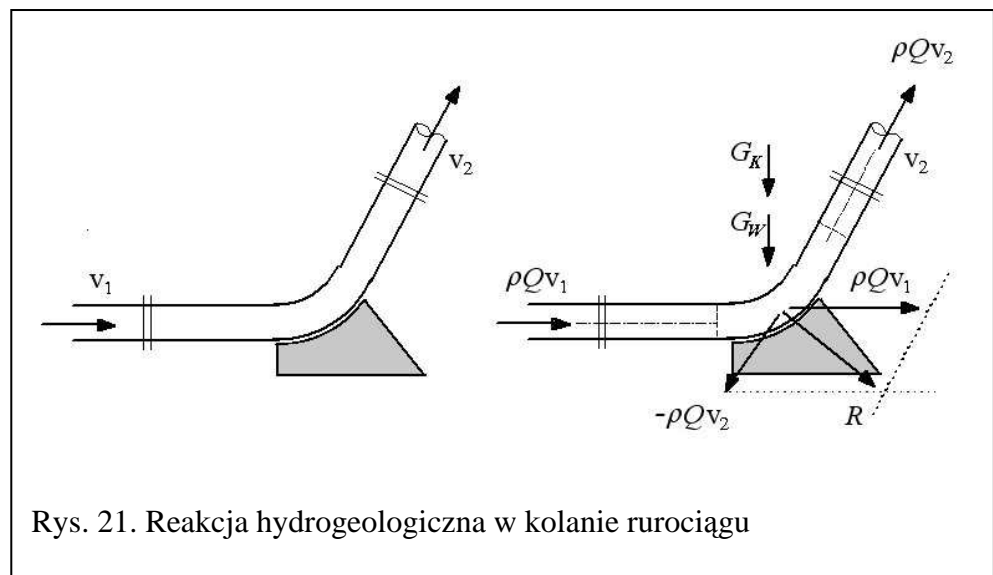
W danych warunkach  $|v_1| = |v_2| = v$  skąd składowe prędkości  $v_1 (v, 0)$  i  $v_2 (v \cos \varphi, v \sin \varphi)$ . Uwzględniając rzuty wymienionych sił na osie współrzędnych  $x$  i  $y$  otrzymamy równania

$$F_x = (p_1 A - p_2 A \cos \varphi) + \rho Q (v - v \cos \varphi)$$

$$F_y = -p_2 A \sin \varphi + G_k + G_w + \rho Q (-v \sin \varphi)$$

Moduł wypadkowej

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



Rys. 21. Reakcja hydrodynamiczna w kolanie rurociągu

**Przykład 3.3. Parcie hydrodynamiczne swobodnego strumienia**

W przypadku swobodnego strumienia cieczy idealnej, dla którego pomijamy oddziaływanie siły ciężkości i opory ruchu cieczy, parcie hydrodynamiczne oddziaływania strumienia na ściankę zakrzywioną, odchylającą kierunek ruchu strumienia o kąt  $\alpha$  wyliczane jest wprost z równa :

$$R_x = \rho Q v (1 - \cos \varphi)$$

$$R_y = \rho Q v \sin \varphi$$

W przypadku uderzenia strumienia w ściankę ustawioną prostopadle do kierunku ruchu strumienia, ciecz po uderzeniu w przeszkodę rozplywa się równomiernie we wszystkich kierunkach, stąd  $\rho Q \vec{v} = 0$  a całkowita siła parcia hydrodynamicznego wynosi:

$$P = \rho Q v = \rho A v^2 = 2 \rho g A \frac{v^2}{2g}$$

czyli jest dwukrotnie większa od parcia hydrostatycznego wywołanego ciśnieniem równoważnym wysokości prędkości.

### Przykład 3.4. Wypływ cieczy ze zbiornika przez mały otwór

Zakładamy ruch ustalony, tj. zgodnie z równaniem ciągłości dopływ do zbiornika równy jest odpływowi dzięki czemu poziom wody w zbiorniku jest stały. Zakładamy także, że otwór jest tak mały, że można nie uwzględniać zmiany prędkości na wysokości jego przekroju. Objętość kontrolowana zawarta jest między przekrojami kontrolnymi 1 i 2 i ściankami zbiornika (rys.22). Dla poziomego porównawczego przyjętego w osi otworu, równanie Bernoulliego dla podanych wyżej przekrojów kontrolnych przybiera postać:

$$h + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

po zredukowaniu ciśnienia atmosferycznego  $p_a$  i przyjęciu  $v_1 = 0$ , otrzymujemy wyrażenie na prędkość wypływu cieczy i wydatek:

$$v = \varphi \sqrt{2gh}, \quad Q = \mu A \sqrt{2gh}$$

gdzie:  $\mu$  - współczynnik wydatku  $\mu = \varphi \varepsilon$ , dla małych otworów możemy przyjmować  $\mu = 0,60 \div$

$0,62$ ,  $\varphi$  - współczynnik prędkości,  $\varepsilon$  - współczynnik dławienia bocznego  $\varepsilon = \frac{A_s}{A}$ .

