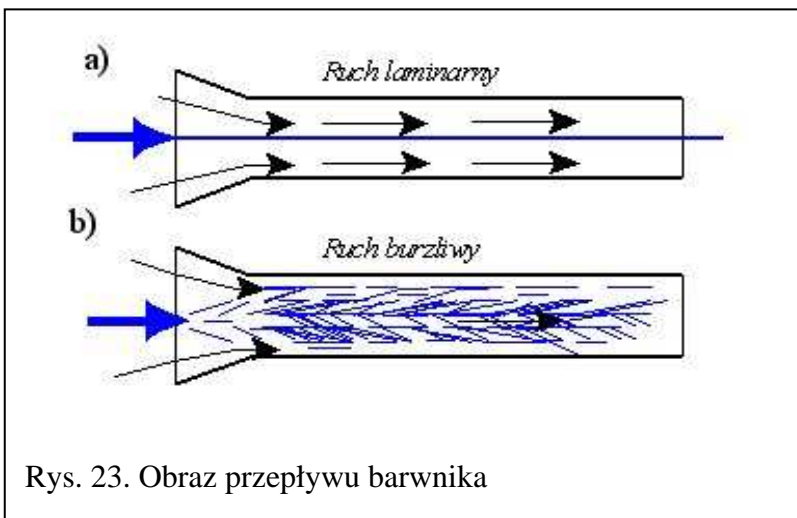


WYKŁAD 4

4. RUCH JEDNOSTAJNY

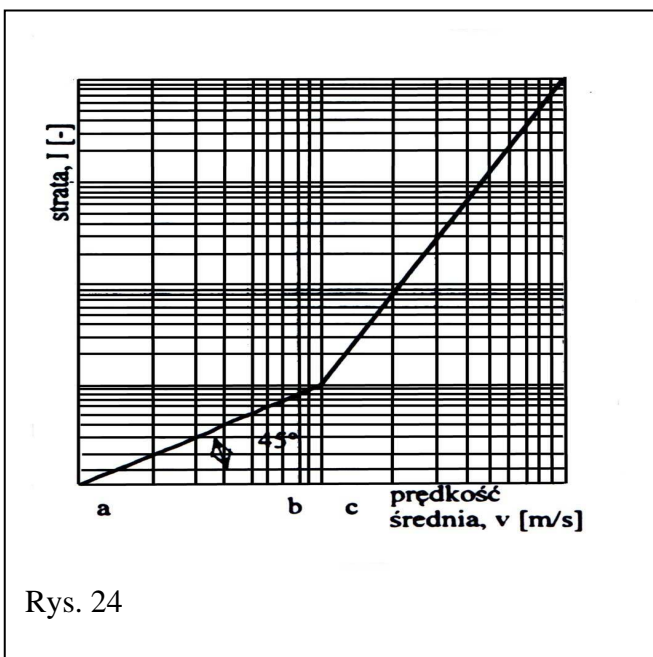
4.1. Doświadczenie Reynoldsa

Obserwacje ruchu cieczy rzeczywistej wykazują, że ruch ten przebiega w rozmaity sposób zależnie od szeregu warunków. Charakter ruchu cieczy lepkiej bardzo wyraźnie ukazały doświadczenia Reynoldsa polegające na obserwacji ruchu cieczy w przezroczystej rurze, w której ciecz płynęła ruchem trwałym przy różnych prędkościach.



Dla małych przepływów i bardzo małych prędkości, wprowadzony do przewodu barwnik porusza się wraz z cieczą w postaci pojedynczej nitki równoległej do osi rurociągu i brak jest zauważalnego mieszania się zabarwionej cieczy z otaczającą cieczą (rys.23a). Mimo kolejnego zwiększania prędkości obraz ruchu

jest podobny aż do pewnej określonej prędkości, po przekroczeniu której obraz się gwałtownie zmienia. Barwnik nie porusza się już w postaci cienkiej nitki lecz rozplywa się i zabarwia cały strumień badanej cieczy (rys.23b). Wskazuje to, że cząstki cieczy nie poruszają się wzdłuż torów równoległych lecz prócz kierunków ruchu głównego wzdłuż osi rury, istnieją dodatkowe ruchy poprzeczne powodujące mieszanie się wpuszczanego barwnika.



Opisane badanie wykazują wyraźnie, że mamy do czynienia z dwoma rodzajami ruchu. Ruch, przy którym cząsteczki cieczy poruszają się po torach równoległych nazywany jest **ruchem warstwowym** lub **laminarnym**. Drugi rodzaj ruchu nazywany jest **ruchem burzliwym** lub **turbulentnym**

Jeśli w rurociągu, w którym obserwowana jest płynąca ciecz, będą zainstalowane w pewnej odległości od siebie dwa piezometry, to

w warunkach ruchu ustalonego (trwałego, stała prędkość ruchu cieczy) będzie można odczytać różnicę ciśnień (Δh), czyli straty energii na odcinku między piezometrami (l). Poza obserwacją obrazu ruchu, możemy także zmierzyć i obliczyć charakterystyczne parametry, opisujące warunki przeprowadzanego doświadczenia. Będą to następujące wielkości: prędkość średnia przepływu cieczy v , otrzymana z bezpośredniego pomiaru objętości cieczy V wypływającej z rurociągu o znanej średnicy w określonym czasie Δt , i jednostkowe straty energii $\Delta h/l$.

Wyniki pomiarów można nanieść na wykres. Otrzymałą krzywą można opisać równaniem

$$\frac{\Delta h}{l} = I = a v^n \text{ lub po logarytmowaniu obu stron równania w postaci } \lg I = \lg a + n \lg v.$$

Wykres uzyskanej krzywej w układzie współrzędnych logarytmicznych przedstawiono na rys.24. W granicach prędkości od a do b prosta przebiega pod kątem 45° , tzn. wykładnik potęgowy n w zależności opisującej tę krzywą wynosi 1, natomiast przy prędkościach powyżej granicy c wykładnik ten przybiera wartość 2. W przedziale $b - c$, w tzw. obszarze przejściowym, punkty doświadczalne są dość rozproszone i ich położenie zależy czy w trakcie przeprowadzania doświadczenia kolejno zwiększaliśmy, czy zmniejszaliśmy prędkość. Prędkości określające ten obszar nazywane są **dolną** lub **górną prędkością graniczną**.

Na podstawie rozważań o podobieństwie przepływów w rurociągach o różnej średnicy stwierdzono, że granice obszaru przejściowego mogą być określone za pomocą bezwymiarowej liczby zwanej **liczbą Reynoldsa**, którą definiujemy następująco

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

gdzie v jest prędkością średnią w przekroju rurociągu, d jego średnicą a ν kinematyczny współczynnik lepkości cieczy. W przypadku rur gładkich na odcinkach dostatecznie odległych od wlotu a więc od miejsca zaburzeń można przyjąć że ruch laminarny występuje gdy nie jest przekroczona liczba graniczna $Re = 2320$.

Praktycznie biorąc przepływy laminarne mogą występować najczęściej przy ruchu cieczy w kapilarach, w przepływach wód gruntowych, przepływach w warstwie przyściennej. W pełnym przekroju rurociągu ruch laminarny występuje raczej rzadko a wyjątkowo w przepływach cieczy w korytach otwartych (rowach, kanałach).

Parametrem, który pozwala na bardziej ogólne porównywanie warunków ruchu cieczy

w przewodach o różnych kształtach i różnym napełnieniu jest promień hydrauliczny definiowany następująco:

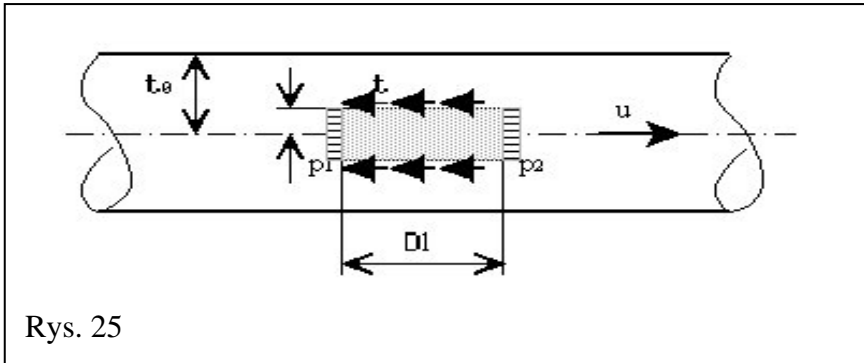
$$R_h = \frac{\text{pole przekroju}}{\text{obwód zwilżony}} = \frac{A}{\chi}$$

Obwodem zwilżonym nazywamy długość obwodu przekroju, na której ciecz styka się ze

ściankami przewodu.

W przypadku kanałów otwartych w liczbie Reynoldsa charakterystycznym parametrem liniowym jest promień hydrauliczny R_h , stąd $Re = vR_h / \nu$ a $Re_{gr} = 300 - 500$.

4.2. Opory ruchu w ruchu laminarnym jednostajnym



Rys. 25

Zakładamy, że rozpatrujemy przepływ w prostoosiowym poziomym przewodzie kołowym o promieniu r_o , w którym wyodrębniamy powierzchnię walcową o promieniu r i

długości l , współśrodkową z osią przewodu w którym charakterystyka prędkości ruchu cieczy nie zmienia się na długości przewodu. Jedynymi siłami działającymi na wydzielony walec cieczy, siłami działającymi równoległe do kierunku ruchu, są siły tarcia między cząsteczkami cieczy (τ) i siły ciśnienia (p) w przekrojach poprzecznych ograniczających długość rozpatrywanego walca (rys.25). Zgodnie z założeniami nie występuje zmiana ilości ruchu (pędu) na długości przewodu, stąd suma rzutów tych sił musi być równa zero:

$$2\pi r \Delta l \tau - (p_1 - p_2) \pi r^2 = 0$$

Równanie to ważne jest dla wydzielonego obszaru o promieniu r oraz dla całego przekroju o promieniu $r_o = 0,5 d$. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\tau_o = \rho g \frac{A}{\chi} \frac{h_f}{l} \quad (37a)$$

gdzie r_o - naprężenia styczne przy ściankach rurociągu, A - pole przekroju poprzecznego, χ - obwód zwilżony a h_f - straty wysokości ciśnienia na opory tarcia na długości rurociągu l .

Równanie (37a), przedstawiane jest w postaci

$$\tau_o = \rho g R_h I \quad (37b)$$

gdzie promień hydrauliczny $R_h = A/\chi$ a spadek hydrauliczny (jednostkowe straty energii na długości rurociągu) $I = h/l$. Równanie (37) nazywana jest **podstawowym równaniem ruchu jednostajnego**, ważnym dla przewodów pod ciśnieniem i dla koryt otwartych.

W wielu przypadkach korzystne jest stosowanie pojęcia **prędkości dynamicznej** v_x definiowanej jako $v_*^2 = \tau_o / g$, co pozwala zapisać

$$v_*^2 = g R_h I \quad (38)$$

Powyżej przedstawione zależności ważne są dla ruchu laminarnego i burzliwego. W praktycznym zastosowaniu najczęściej spotykana jest zależność w której występuje **współczynnik oporu liniowego** λ , zwana wzorem **Darcy-Weisbacha**

$$h_f = \lambda \frac{l}{4 R_h} \frac{v^2}{2 g} \quad (39)$$

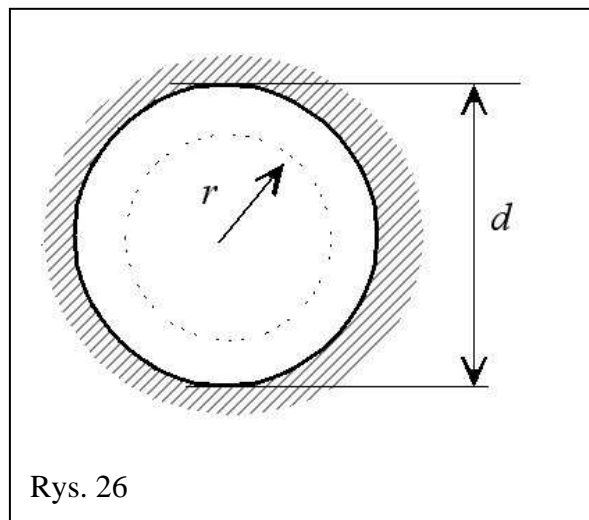
Warto zauważyć, że jest ono równoważne zależności $(v_*/v)^2 = \lambda/8$.

4.3. Rozkład prędkości w ruchu laminarnym

Dla ruchu jednostajnego ustalonego, wychodząc z newtonowskiej definicji lepkości cieczy $\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}$ (str. 2) oraz równania (37b), można na drodze teoretycznej wyprowadzić równanie określające rozkład prędkości w przekroju poprzecznym. Dla rurociągów o przekroju kołowym równanie to można przedstawić w postaci

$$\frac{u(r)}{u_*} = \frac{1}{4} \frac{u_*}{\nu} \text{Re} \left[1 - \left(\frac{2r}{d} \right)^2 \right] \quad (40)$$

gdzie $u(r)$ jest prędkością w odległości promienia r mierzonego od osi przewodu (rys.26) a liczba Reynoldsa $\text{Re} = vd/\nu$.

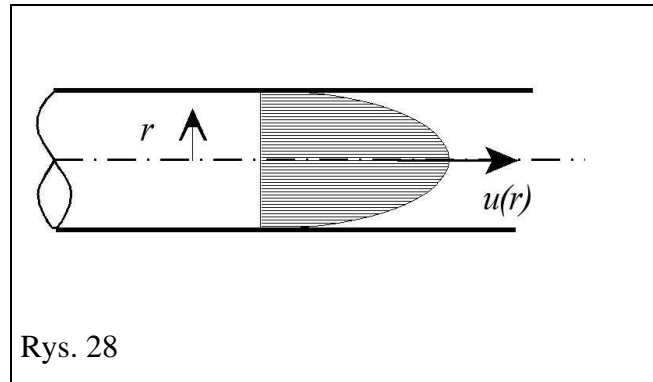
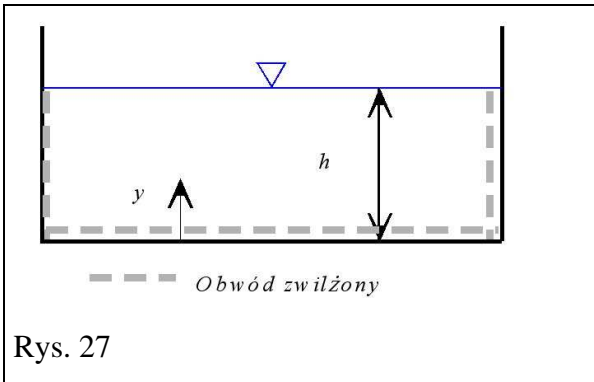


Rys. 26

Dla kanału otwartego, bardzo szerokiego równanie rozkładu prędkości ma postać

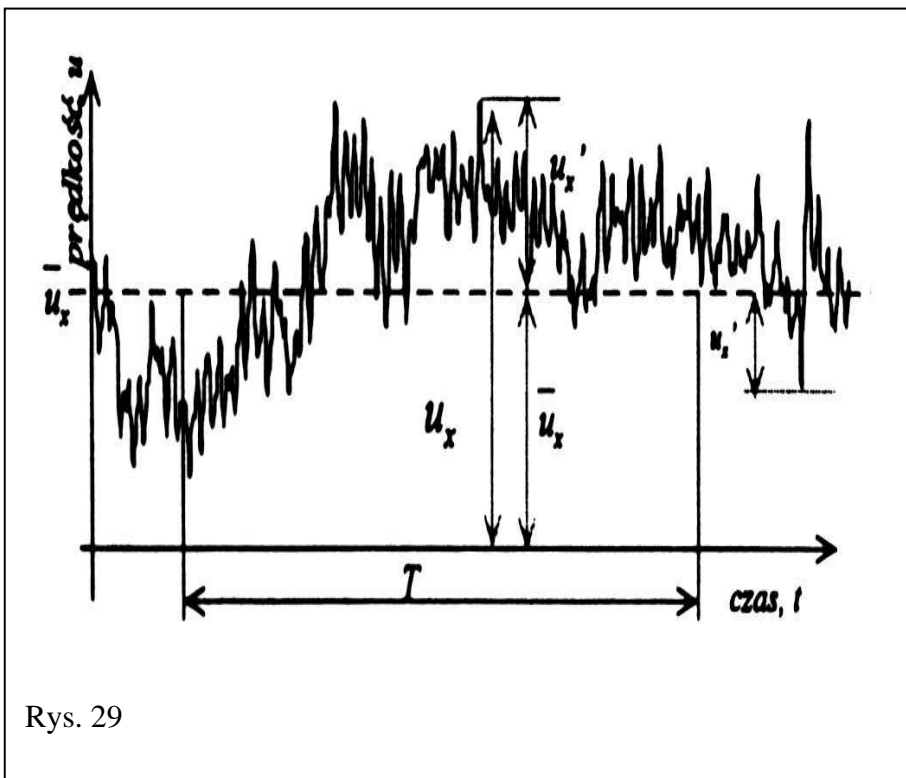
$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{8} \frac{u_*}{\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{y}{h} \right) \left(2 - \frac{y}{h} \right) \quad (41)$$

gdzie $u(y)$ prędkość w odległości pionowej y mierzonej od dna kanału (rys. 27), h jest głębokością napełnienia koryta a liczna Reynoldsa $Re = v (4 R_h) / \nu$. Dla kanału bardzo szerokiego przyjmuje się promień hydrauliczny $R_h = h$. Równanie (40) i (41) są zależnościami kwadratowymi tzn. wykresy prędkości są parabolami, charakterystycznymi dla ruchu jednostajnego laminarnego (rys. 28).



4.4. Rozkład prędkości w ruchu burzliwym

Mechanizm strumienia burzliwego jest nadzwyczaj złożony. Ruch cząsteczek cieczy w takim ruchu jest chaotyczny, cząsteczki cieczy posiadają zmienną prędkość pod względem wartości i kierunku. W tej sytuacji można powiedzieć, że ruch ustalony w pełni tego znaczenia występuje tylko w przypadku ruchu laminarnego.



Mierząc, w miarę dokładnym przyrządem, składową prędkości równoległą do przyjętego, określonego kierunku ruchu, w przypadku ruchu burzliwego otrzymamy wykres chwilowej prędkości pokazany na rys.29, pokazujący jej zmienność w czasie. Wyniki pomiarów pozostałych dwóch składowych prędkości

będą miały bardzo podobny charakter zmienności.

Dla dostatecznie dużego przedziału czasu T , możemy wyznaczyć statystycznie uśrednione prędkości składowe, zwane także prędkościami przeciętnymi

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_x dt \quad \bar{u}_y = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_y dt \quad \bar{u}_z = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_z dt \quad (42a)$$

stąd składowe chwilowych prędkości można wyrazić jako

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \quad u_y = \bar{u}_y + u'_y \quad u_z = \bar{u}_z + u'_z \quad (42b)$$

gdzie \bar{u}_x , \bar{u}_y , \bar{u}_z są prędkościami uśrednionymi w czasie (prędkości przeciętne), a pozostałe wyrażenia u'_x , u'_y , u'_z nazywamy prędkościami pulsacyjnymi (chwilowe pulsacje prędkości).

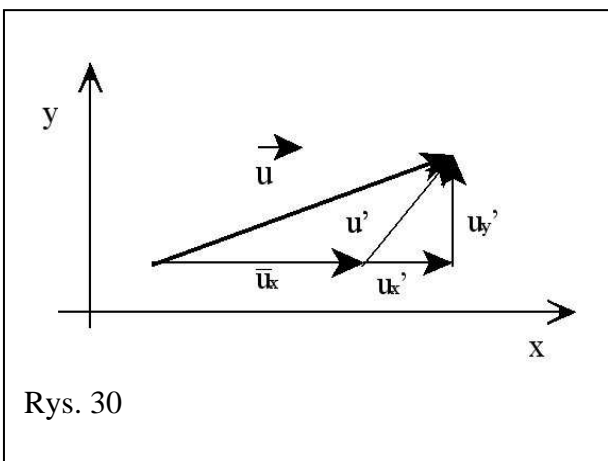
Warto zwrócić uwagę, że

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_x dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{u}_x dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'_x dt = \bar{u}_x + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'_x dt$$

stąd

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'_x dt = 0 \quad (43)$$

czyli uśredniona w czasie prędkość pulsacji jest równa zero.



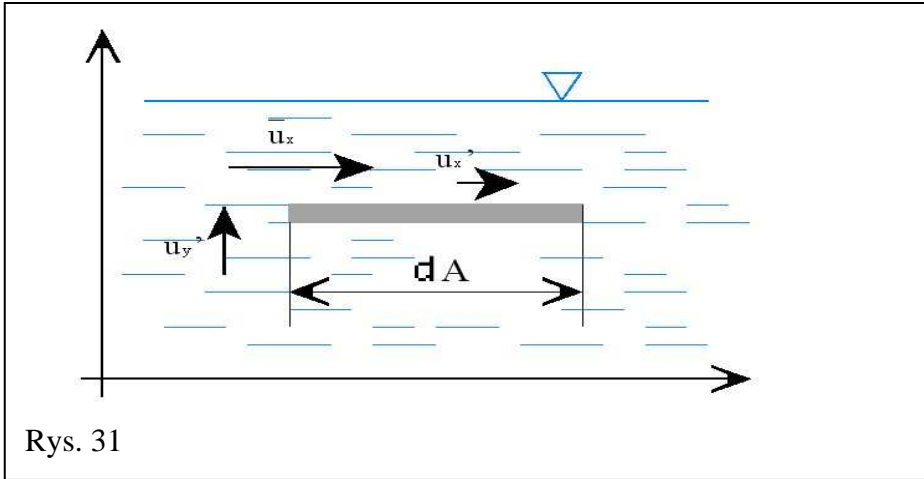
Rys. 30

Rozpatrzmy przypadek ruchu płaskiego, z tak przyjętym układem współrzędnych, że ruch cieczy odbywa się w kierunku osi x , wtenczas uśredniona w czasie składowa prędkości w kierunku osi y $\bar{u}_y = 0$ - wektor chwilowej prędkości oraz wszystkie składowe tego wektora pokazano na rys.30.

W quasi-ustalonym strumieniu burzliwym cząstka cieczy prócz ruchu postępowego w kierunku ruchu głównego, doznaje jeszcze przemieszczeń poprzecznych. Badanie tego ruchu sprowadza się najczęściej do określenia charakterystyk burzliwości i powiązania ich z prędkością uśrednioną. Tę

drogę poszukiwań nazywa się półempiryczną teorią burzliwości.

Zgodnie z teorią **Prandtla**, jeśli elementarna masa cieczy przy przemieszczaniu w kierunku poprzecznym przejdzie na odległość l , to nastąpi zmieszanie danej masy z masą otaczającą, powodując zmianę wektora ilości ruchu danej masy.



Rys. 31

Wskutek istnienia prędkości pulsacji istnieje chwilowy przepływ przez pole δA (rys. 31). Cząsteczki przepływają z punktu, gdzie jest prędkość $\bar{u}_x(y)$ do punktu gdzie

$$\bar{u}_x(y+l) = \bar{u}_x(y) + l' \frac{du_x}{dy} \quad (44)$$

Przez powierzchnię δA w czasie δt przepływa masa cieczy

$$\delta m = \rho u'_y \delta A \delta t \quad (45)$$

Jeśli masa δm , która w danej chwili ma prędkość pulsacji u'_x po przejściu przez poletko zostanie jej pozbawiona, to znaczy, że nastąpi zmiana pędu o wartość

$$\delta m u'_x = -\rho u'_x u'_y \delta A \delta t \quad (46)$$

Zmiana ilości ruchu (pędu) w kierunku osi x musiała być spowodowana pewną siłą F działającą w tym kierunku (tzn. stycznie do głównego kierunku ruchu). W oparciu o zasadę ilości ruchu

$$-\rho u'_x u'_y \delta A \delta t = \delta F \delta t \quad (47)$$

Dzieląc powyższe wyrażenie przez $\delta A \delta t$, otrzymujemy

$$\tau_{puls} = \frac{\delta F}{\delta A} = -\rho u'_x u'_y \quad (48)$$

Uwzględniając odpowiednie zależności między składowymi prędkościami pulsacji otrzymujemy

$$\tau_{puls} = \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (49)$$

gdzie l jest tzw. drogą mieszania.

Wyznaczone powyżej naprężenie styczne wywołane pulsacją prędkości występuje niezależnie od rozpatrywanych poprzednio naprężeń stycznych powstających dzięki lepkości cieczy, a zatem całkowite naprężenie styczne jako jednostkowa siła oporu ruchu, występujące przy pulsacyjnym ruchu burzliwym cieczy lepkiej równa się

$$\tau = \pm \mu \frac{du_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (50)$$

Przy ruchu laminarnym $l = 0$, przy ruchu w pełni burzliwym pierwszy człon jest bardzo mały w porównaniu z drugim i naprężenia styczne stają się proporcjonalne do kwadratu prędkości co określane jest zwykle jako **obszar kwadratowego prawa oporu**.

Przyjmując w równaniu (50) wyrażenie $\varepsilon = \rho l^2 \frac{du_x}{dy}$, gdzie ε jest tzw. **współczynnikiem burzliwej wymiany**, równanie to można sprowadzić do postaci

$$\tau = \pm (\mu + \varepsilon) \frac{du_x}{dy} \quad (51)$$

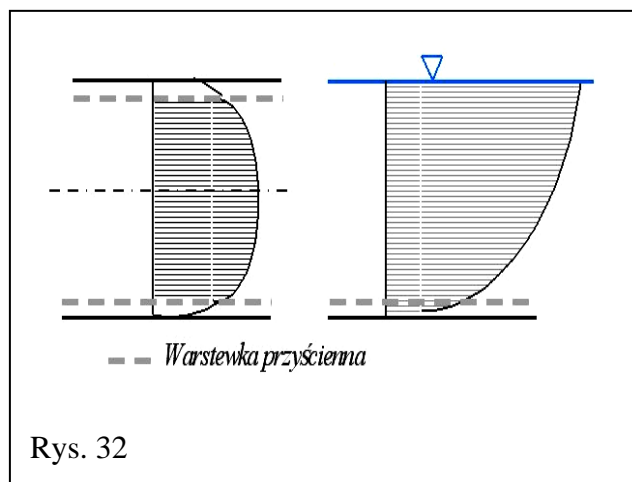
Należy podkreślić zasadniczą różnicę między μ i ε , gdyż μ dla określonej temperatury jest stałe, natomiast ε zmienia się w zależności od położenia punktu w przekroju i jest właściwością ruchu cieczy a nie samej cieczy.

Brak jest dotychczas pełnej teorii przepływu burzliwego. Bardzo często przyjmuje się tzw. logarymiczne prawo rozkładu prędkości wyprowadzone z równania (49) w postaci

$$\frac{u(y)}{v_*} = \frac{v}{v_*} + \frac{l}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (52)$$

gdzie y jest odległością od ścianki przewodu a y_0 napełnieniem w przypadku koryta otwartego lub

promieniem przewodu kołowego zamkniętego; $\kappa = 0,4$ jest sta Karmana, l/κ jest stałą dla szerokich



Rys. 32

koryt otwartych $\approx 2,5$ a dla rurociągów $\approx 3,7$. Rozkład prędkości opisany równaniem (52) traci ważność w pobliżu ścianki ($y \rightarrow 0$) oraz w pobliżu poziomu, zwierciadła wody w korycie otwartym ($y \rightarrow y_o = h$), czyli w warstwie przyściennej. Wykresy rozkładu prędkości w ruchu burzliwym pokazano na rys.32.

5. PRAKTYCZNE OBLICZANIE RUROCIĄGÓW

5.1. Efekt szorstkości

Wpływ niewielkich szorstkości ścian przewodu prowadzącego wodę jest całkowicie pomijalny w przypadku ruchu laminarnego jednak ma istotne znaczenie w przypadku przepływu burzliwego. Miarą szorstkości ścian przewodu jest przeciętna wysokość k_s poszczególnych występow, modelowana ziarnami piasku oblepiających wewnętrzną ściankę przewodu. Przyjmuje się, że ścianka jest **hydraulicznie gładka** gdy $k_s < \delta_v$, gdzie δ_v jest grubości podwarstwy laminarnej, $\delta_v = 5 \nu / u_*$. Podobnie ścianka jest **w pełni szorstka** jeśli $2k_s \gg \delta_v$. Wpływ szorstkości uwzględniany jest przy wyznaczaniu współczynnika oporu liniowego λ ze wzoru **Darcy-Weisbacha**, który w obliczeniach rurociągów gdzie $Rh = d/4$ stosowany jest w postaci

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (53)$$

5.2. Opory tarcia w ruchu laminarnym

Prostą zależność między współczynnikiem oporów liniowych a liczbą Reynoldsa można otrzymać poprzez całkowanie równania (40) w polu przekroju poprzecznego rurociągu, prostopadłego do wektorów prędkości, skąd otrzymamy

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{oraz} \quad h_f = \frac{32\mu l}{gd^2} v \quad (54)$$

Zależności te ważne są wyłącznie w obszarze ruchu laminarnego tj. w granicach $\text{Re} \leq 2300$.

5.3. Opory ruchu rurociągów hydraulicznie gładkich

W obszarze przejściowym, w granicach między ruchem laminarnym a ruchem w pełni burzliwym dla rurociągów hydraulicznie gładkich może być stosowany empiryczny wzór Blasiusa w postaci

$$\lambda = 0,316 \text{Re}^{-1/4} \quad (55)$$

Zależność ta może być stosowana w przedziale $4000 < \text{Re} < 100\,000$.

5.4. Opory liniowe w obszarze ruchu burzliwego

Pośród bardzo wielu formuł empirycznych, opisujących zależność współczynnika oporu liniowego, należy wyróżnić wzór **Colebrooka** i **White'a** w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{2,50}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\delta}{3,71d} \right] \quad (56)$$

gdzie $\delta = k_s$ czyli szorstkość bezwzględna rurociągu o średnicy d . Wzór ten, wyprowadzony wprost z równania rozkładu prędkości typu logarytmicznego uważany jest za bardzo wiernie opisujący wyniki doświadczeń. Prostsza w zastosowaniu w praktyce jest formuła **Moodyego**:

$$\lambda = 0,0055 \left[1 + \left(20000 \frac{\delta}{d} + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{1/3} \right] \quad (57)$$

Zależność ta została opracowana w postaci diagramów do wygodnych w praktycznym zastosowaniu (rys.33).

Jeszcze bardziej korzystna w zastosowaniu jest uproszczona formuła **Altszula** w postaci

$$\lambda = 0,1 \left(1,46 \Delta_r + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25} = 0,11 \left(\Delta_r + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} \quad (58)$$

gdzie Δ_r jest szorstkością względną

$$\Delta_r = \frac{\delta}{d} \quad (59)$$

Na rys.33 (wykres Colebrooka - White'a) liniami przerywanymi zaznaczono krzywe ograniczające zmienność współczynnika w przejściowym obszarze ruchu. Według **Czugajewa** liczby Reynoldsa odpowiadające temu obszarowi określone są jako $(\text{Re})'_{gran} < \text{Re} < (\text{Re})''_{gran}$. W przypadku gdy zachodzi zależność $4000 \leq \text{Re} \leq (\text{Re})'_{gran}$ należy stosować w praktyce zależności dla rurociągów gładkich, natomiast dla $\text{Re} \geq (\text{Re})''_{gran}$ znajdujemy się w obszarze kwadratowej zależności oporów ruchu, czyli ruchu w pełni burzliwego. Wg **Czugajewa** można przyjmować następujące graniczne wartości liczb Reynoldsa:

$$\text{dolne wartości} \quad (\text{Re})_{gran} \approx \frac{10}{\Delta_r} \quad \text{górne wartości} \quad (\text{Re})_{gran} \approx \frac{500}{\Delta_r} \quad (60)$$

gdzie Δ_r jest szorstkością względną.

5.5. Straty miejscowe (lokalne)

Dodatkowe straty energii występują przy każdej zmianie prędkości przepływu cieczy tzn. przy zmianie ilości ruchu (pędu) straty te obliczamy z formuły

$$h_m = \xi \frac{v^2}{2g} \quad (61)$$

gdzie ξ - współczynnik strat miejscowych, zależny od geometrii przewodu powodującej zmiany prędkości i wywołujące dodatkową burzliwość ruchu, v - średnia prędkość wody w przewodzie wyznaczona zwykle dla przekroju znajdującego się poniżej przeszkody.