WYKŁAD 5

6. OBLICZANIE PRĘDKOŚCI ŚREDNIEJ

Wychodząc wprost z równania Darcy-Weisbacha (39) można wyznaczyć formułę na obliczenie prędkości średniej w przekroju w postaci

$$v = \sqrt{\frac{8\,g}{\lambda}} \quad \sqrt{R_h \, \frac{h_{str}}{l}} \tag{62}$$

Pierwszy czynnik pod pierwiastkiem pierwotnie we wzorach empirycznych przyjmowano jako parametr stały i oznaczano liter *c*. Jest to tzw. współczynnik prędkości o wymiarze $m^{1/2}/s$. Pod drugim pierwiastkiem występuje wielkość $h_{str} \,/\, l = J_e$ wyrażająca straty energii na jednostkę długości cieku. Po wstawieniu tych oznaczeń do wyrażenia (62) otrzymamy wzór **Chézy'ego**

$$v = C\sqrt{R_h \;\; J_e} \tag{63}$$

Jest to jeden z najwcześniejszych wzorów empirycznych stosowany do obliczeń hydraulicznych cieków naturalnych, pochodzący z drugiej połowy XVIII w.

Znanych jest wiele wzorów empirycznych na współczynnik prędkości *c*. W większości przypadków uzależniony on jest od promienia hydraulicznego R_h i szorstkości przewodu. Obecnie najczęściej stosowane są dwa wyrażenia: jeden opisany powyżej wyprowadzony z wzoru **Darcy-Weisbacha** oraz drugi podany przez **Manninga**, gdzie

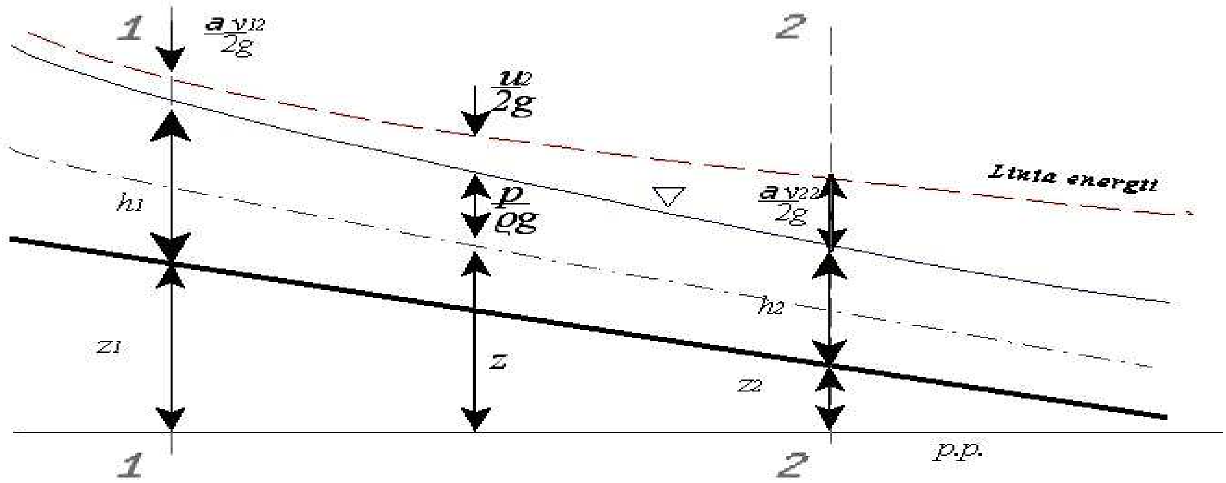
$$c = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} \qquad \text{stąd} \qquad v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} \;\; J_e^{\frac{1}{2}} \tag{64}$$

Wzór **Manninga** szczególnie szeroko stosowany jest w obliczeniach koryt otwartych. Współczynnik *n* zwany jest **współczynnikiem szorstkości** a jego wymiarem jest $m^{1/3}/s$. Należy zauważyć, że wzór **Chezy'ego** i wzór **Manninga** posiadaj współczynniki wymiarowe *c* i *n* dlatego z wzorów tych możemy otrzymać wartości poprawne jedynie wówczas, gdy pozostałe wielkości *v* i R_h wyrażone są w tym samym układzie jednostek. Wartości współczynnika szorstkości *n* zestawione są w tablicach w zależności od opisowej charakterystyki powierzchni ścian przewodu.

7. PRZEPŁYW CIECZY W KORYTACH OTWARTYCH

7.1. Definicje i klasyfikacja przepływu

W odróżnieniu od przepływów w rurociągach, w których woda płynie pełnym przekrojem a ruch wody nie zależy od układu osi rurociągu lecz od spadku ciśnienia, w rowach, kanałach i rzekach zwanych korytami otwartymi, woda płynie ze swobodnym zwierciadłem wody, nad którym panuje ciśnienie atmosferyczne. Rozpatrywany poprzednio przepływ w rurociągach nazywany jest **przepływem ciśnieniowym**. W przypadku przepływu wody przewodem podziemnym ale nie pełnym przekrojem, tzn. gdy występuje swobodne zwierciadło wody, przewód taki pod względem hydraulicznym zaliczany jest do koryt otwartych czyli ściślej do przewodów **o przepływie bezciśnieniowym**. Wszystkie rozważania przedstawione w tym rozdziale dotyczą ruchu ustalonego (trwałego), tzn. przepływu, którego obraz nie ulega zmianie w czasie a wielkości opisujące ruch wyrażone są w postaci funkcji zależnej wyłącznie od położenia.



Rys. 34. Przepływ zmienny

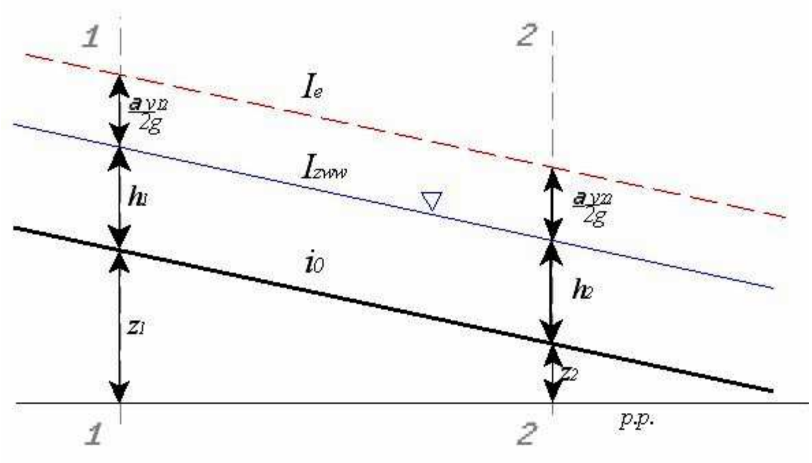
Ogólny przypadek przepływu w korycie otwartym przedstawiono na rys.34. Jeżli wyodrębnimy pojedynczą strugę cieczy, to jej prędkość zależna jest od położenia rozpatrywanego punktu strugi, tzn. *u(s,z)* a sumę energii w obranym przekroju można wyrazić jako $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$,

gdzie $\frac{p}{\rho g} = h$ jest wysokością ciśnienia w danym punkcie strugi. Dla strumienia cieczy rzeczywistej o prędkości średniej *v*, jako wysokość położenia przyjmujemy rzędną jego dna a jako wysokość ciśnienia (bez ciśnienia atmosferycznego) jego głębokość *h*, stąd równanie Bernoulliego przybiera postać:

$$z_1 + h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{str} \qquad (65)$$

Poszczególne człony równania energii dla dwóch wyróżnionych przekrojów strumienia pokazano na rys.34.

7.2. Jednostajny ruch cieczy w korytach otwartych



Rys. 35. Przepływ jednostajny

Wyróżniamy szczególny przypadek ruchu ustalonego, w którym parametry ruchu danego strumienia nie zmieniają się na długości cieku, tj. pole przekroju poprzecznego *A* i prędkość średnia *v* są stałe - ruch taki nazywamy **ruchem jednostajnym**. Obraz takiego ruchu przedstawiono na rys.35.

Z równania (65) można wyliczy jednostkowy spadek linii energii

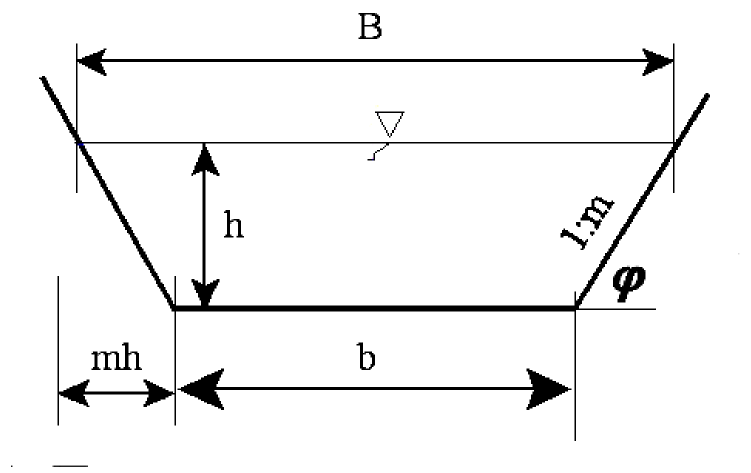
$$J_e = \frac{h_{str}}{l} = \frac{1}{l}\left[\left(z_1 + h_1 + \frac{v^2}{2g}\right) - \left(z_2 + h_2 + \frac{v^2}{2g}\right)\right] \qquad (66)$$

Ponieważ $v_1 = v_2$ to także $v^2_1/2g = v^2_2/2g$ oraz $h_1 = h_2$ stąd spadki linii energii J_e, zwierciadła wody $J_{zw.w.}$ oraz spadek dna i_o są sobie równe i stałe, tzn. nie zależą od długości:

$$J_e = J_{zw.z.} = i_o \qquad (67)$$

Powyższa zależność jest ważną charakterystyką ruchu jednostajnego w korytach otwartych.

7.3. Rozwiązywanie zagadnień przepływu w korytach otwartych



Rys. 36. Koryto trapezowe

Warunkiem ruchu jednostajnego jest stałość przekroju poprzecznego na rozpatrywanej długości koryta, jednak przekroje te mogą przybierać bardzo różne kształty np. półkola, prostokąta czy najczęściej spotykanego trapezu.

Dla charakterystyki

geometrycznej przekroju trapezowego potrzebne są następujące dane (por. rys. 36.): szerokość w dnie kanału b, nachylenie skarp $m = ctg\ \varphi$ (jest kątem nachylenia skarpy do poziomu) i głębokość napełnienia kanału h. Parametry te pozwalają obliczyć pole przekroju poprzecznego A, obwód zwilżony i promie hydrauliczny R_h zgodnie z następującymi zależnościami:

$$A = (b + mh)h \qquad \chi = b + h\sqrt{1 + m^2} \qquad R_h = \frac{A}{R_h} \tag{68}$$

Charakterystykę hydrauliczną danego koryta cieku uzupełniają dwa parametry: współczynnik szorstkości n oraz spadek podłużny dna koryta i_o, który w przypadku ruchu jednostajnego równy jest spadkowi linii energii J_e. Mając znaną, wyżej opisaną pełną charakterystykę koryta cieku, można wyznaczy prędkość średnią v przepływu wody oraz natężenie przepływu Q (wydatek) zgodnie z zależnościami:

$$v = \frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}}\ J_e^{\frac{1}{2}} \qquad Q = A\ v = K\sqrt{J_e} \tag{69}$$

gdzie
$$K = \frac{1}{n} A R_h^{\frac{2}{3}} \tag{70}$$

Wielkość K jest tzw. **wskaźnikiem (modułem) wydatku**.

Dla koryt o przekroju prostokątnym charakterystyka geometryczna jest prostsza, gdy A = b · h a χ = b + 2 · h.

Obliczenie wydatku przy znanej pełnej charakterystyce koryta należy do najprostszych zadań związanych z ruchem cieczy w korytach otwartych. Podobną klasę zadania stanowi wyznaczenie wartości spadku podłużnego $J = i_o$ przy znanym wydatku lub prędkości i znanych pozostałych parametrach koryta lub określenie wartości współczynnika szorstkości n w podobnych warunkach. Bardziej złożonym zadaniem jest wyznaczenie głębokości napełnienia koryta h przy zadanym natężeniu przepływu Q, gdy znany jest kształt koryta. W tym przypadku rozwiązanie otrzymujemy drogą prób, wyliczając wydatek dla założonych głębokości. Bardzo pomocnym jest tu wykres sporządzony z kolejnych wyników próbnych w postaci funkcji $Q(h)$ zwanej **krzywą wydatku**.

W procesie projektowania urządzeń wodnych często występuje przypadek konieczności przyjęcia wymiarów koryta, które przy istniejącej sytuacji terenowej a więc znanym możliwym spadku podłużnym dna musi posiadać określony, z góry zadany wydatek. Czasem dla projektowanego umocnienia dna i skarp koryta znana jest prędkość dopuszczalna, która nie może być przekroczona ze względu na niebezpieczeństwo zniszczenia projektowanych umocnień lub ewentualnego zniszczenia skarp nieumocnionych. To zagadnienie nie ma jednoznacznego rozwiązania, gdy nieznane parametry geometryczne koryta przewyższają liczbowo równania wiążące omawiane wielkości. Jest to dodatkowy warunek, który jedynie ogranicza obszar możliwych rozwiązań .

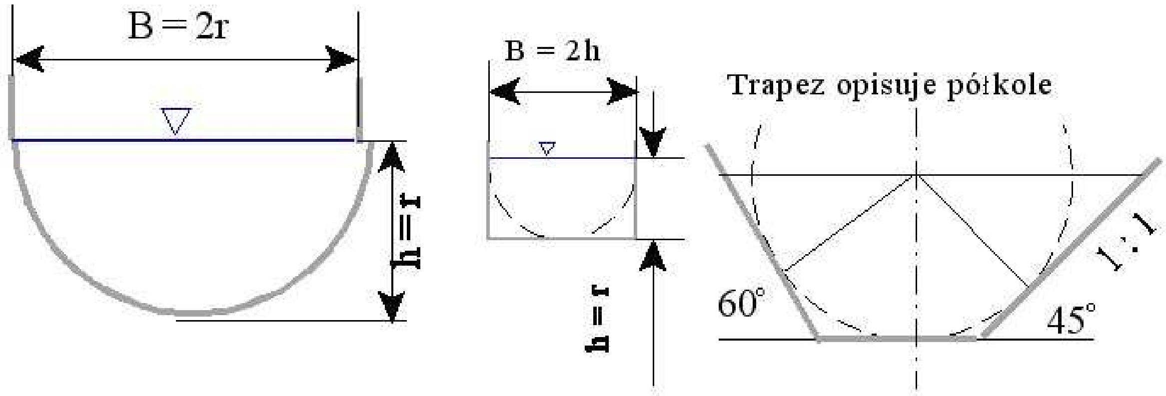
7.4. Hydraulicznie najkorzystniejszy kształt koryta

Bliższa analiza zależności (69) i (70) wskazuje, że przy zadanym spadku $J_e = i_o$ natężenie przepływu będzie tym większe im większa będzie wartość wskaźnika wydatku *K*. Przy maksymalnej wartości *K* i zadanym wydatku *Q* można otrzymać minimalny spadek podłużny. Przekrój spełniający taki warunek nazywamy przekrojem hydraulicznie najkorzystniejszym.

Wskaźnik wydatku *K* można przedstawić w następującej postaci:

$$K = A\frac{1}{n}R_h^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{n}A^{\frac{5}{3}}\chi^{-\frac{2}{3}} \tag{71}$$

Dla łatwiejszego porównania różnych kształtów koryta można założyć, że każde koryto ma takie same pole przekroju poprzecznego (A = *const*) oraz identyczną szorstkość ścianek (n = *const*).



Rys.37. Przekroje poprzeczne kanałów hydraulicznie najkorzystniejsze

Przy tych założeniach z równania (71) wynika, że *K* osiągnie maksimum gdy obwód zwilżony χ przyjmie wartość minimalną. Ze wszystkich możliwych kształtów przekroju poprzecznego koryta warunek ten spełnia koryto o kształcie półkola (rys.37a) - w tym przypadku dane pole *A* ograniczone jest najmniejszym obwodem zwilżonym $\chi = \pi r$.

Można jednak postawić pytanie jaka powinna być proporcja boków przekroju prostokątnego, aby ze wszystkich możliwych kształtów prostokąta, dla zadanego pola *A* obwód zwilżony był najmniejszy. W tym celu należy wyznaczy ekstremum funkcji $\chi = f(h)$.

Wiedząc, ze $A = b \cdot h$, $\chi = b + 2 \cdot h = b + 2A/b$, można wyliczy warunek występowania ekstremum tej funkcji:

$$\frac{d\chi}{dh} = \frac{d}{dh}\left(b + 2\frac{A}{b}\right) = 1 - 2\frac{h}{b} = 0 \tag{72}$$

Z zależności (72) otrzymujemy, że dla koryta o prostokątnym kształcie przekroju poprzecznego hydraulicznie najkorzystniejszą proporcją boków jest

$$b = 2h \tag{73}$$

to znaczy, że szerokość koryta powinna stanowić podwojoną wartość głębokości. Warto zauważyć, że taki kształt koryta opisuje półkole o promieniu $r = h$ a jego promie hydrauliczny $R_h = h/2$ (por. rys.37).

Analogiczne pytanie można postawić w stosunku do kształtu przekroju poprzecznego koryta trapezowego. Jeżeli założymy określone nachylenie skarp koryta, tzn. założymy, ze $m = ctg\ \varphi = const$ i przeprowadzimy podobne jak wyżej obliczenia dla znalezienia ekstremum funkcji $\chi = f(h)$, otrzymamy warunek

$$\frac{b}{h} = 2\,\mathrm{tg}(\varphi/2) \tag{74}$$

Warunek powyższy jest jednocześnie warunkiem opisania półkola trapezem (por. rys. 37). W praktyce częściej stosowany jest nieco inny zapis warunku hydraulicznie najkorzystniejszego kształtu przekroju trapezowego, uzależniony od wielkości $m = ctg\ \varphi$ w postaci

$$\beta_n = \frac{b}{h} = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right) \tag{75}$$

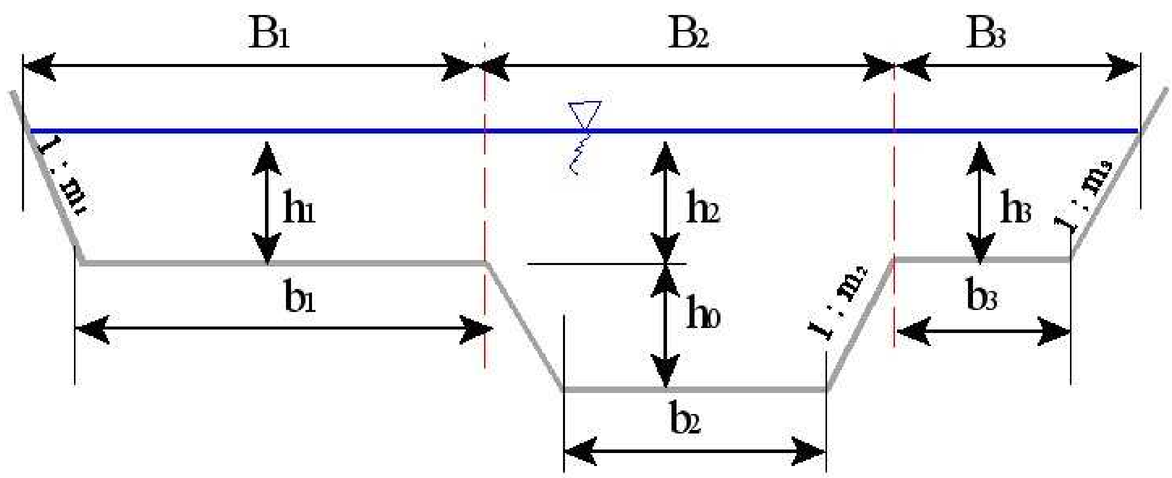
Wartości stosunku $\beta = b/h$ dla najczęściej stosowanych w praktyce nachylenia skarp kanałów i rowów zestawiono w tabeli poniżej.

m	0	1	1.5	2	2,5
β_n	2	0,828	0,606	0,472	0,385

7.5. Koryta złożone

Opisane wyżej formuły pozwalające obliczyć prędkość przepływu wody w korycie cieku dotyczą prędkości średniej w całym przekroju. Podstawową hydrauliczną charakterystyką przekroju poprzecznego jest promień hydrauliczny R_h od którego w istotny sposób zależy wartość prędkości - por. wzór (63).

W praktyce spotyka się koryta, które przy wzroście głębokości radykalnie zmieniaj swą charakterystykę. Przykład takiego koryta przedstawiono na rys.38. W przypadku wzrostu głębokości nieco powyżej głębokości środkowego koryta, pole przekroju poprzecznego wzrasta niewiele natomiast radykalnemu powiększeniu ulega obwód zwilżony. Przy obliczeniu prędkości średniej dla całego przekroju otrzymamy prędkość mniejszą niż przy mniejszej głębokości wskutek czego całkowity wydatek maleje i otrzymane wyniki bardzo odbiegają od rzeczywistości. W takiej sytuacji poprawnie jest podzielić myślowo całe koryto na koryta cząstkowe charakteryzujące się mniej więcej podobnymi głębokościami - na rys.38. są to trzy koryta - i dlatego często takie koryta nazywa się korytami wielodzielnymi. Procedura obliczenia wydatku takich koryt polega na oddzielnym obliczeniu wydatku dla poszczególnych koryt cząstkowych a całkowity wydatek będzie sumą tych wydatków.



Rys. 38. Koryto wielodzielne

Dla przykładu przedstawionego na rys.38 przebieg obliczeń wygląda następująco:

$$A_1 = 0{,}5 m_1 h_1^{\ 2} + b_1 h_1 , \qquad A_2 = B_2 h_2 + \left(b_2 + m_2 h_0\right) h_0 , \qquad A_3 = b_3 h_3 + 0{,}5 m_3 h_3^{\ 2}$$

$$\chi_1 = h_1 \sqrt{1 + m_1^{\ 2}} + b_1 , \quad \chi_2 = 2 h_2 \sqrt{1 + m_2^{\ 2}} + b_2 , \qquad \chi_3 = b_3 + h_3 \sqrt{1 + m_3^{\ 2}}$$

$$K_1 = A_1 \frac{1}{n_1} R_{h1}^{2/3} \quad , \qquad K_2 = A_2 \frac{1}{n_2} R_{h2}^{2/3} , \qquad K_3 = A_3 \frac{1}{n_3} R_{h3}^{2/3}$$

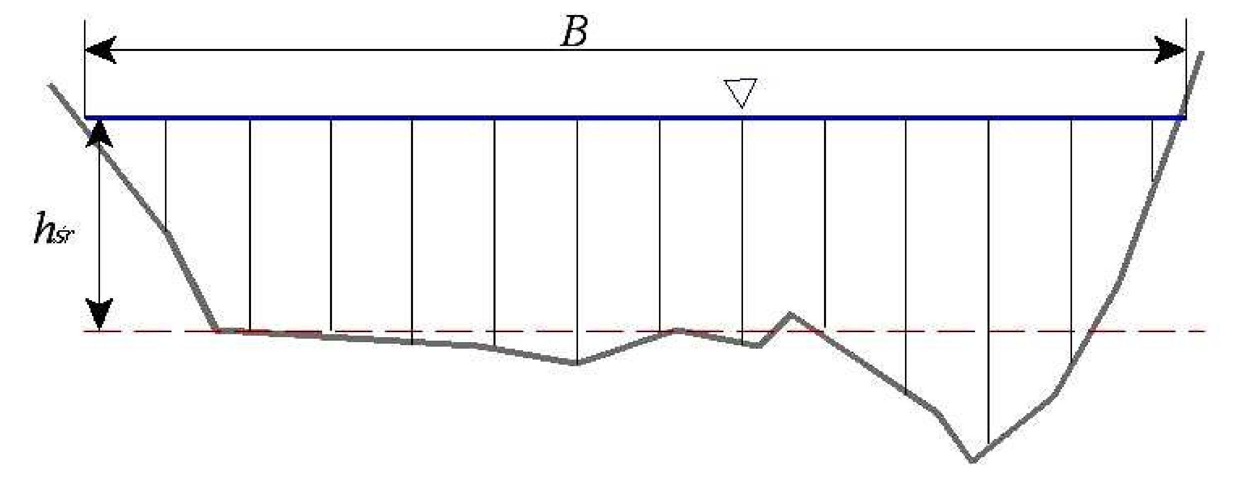
Wydatek dla całego przekroju wyliczamy jako sumę wydatków koryt cząstkowych:

$$Q = (K_1 + K_2 + K_3)\sqrt{i_o}$$

7.6. Koryta naturalne

Kształt przekroju poprzecznego cieków naturalnych: strumieni, rzek, bardzo odbiega od regularnych figur geometrycznych. Jedną z charakterystycznych cech takich koryt jest duża szerokość w porównaniu z głębokością. Przykład takiego koryta pokazano na rys.39. Podstawową charakterystyką geometryczną takiego przekroju są wyniki pomiarów głębokości, dokonywanych zwykle w regularnych odstępach. Pole przekroju poprzecznego koryta jest sumą pól otrzymanych w ten sposób trapezów i dwóch trójkątów bocznych. Przy dużej szerokości koryta, obwód zwilżony jest bardzo bliski szerokości koryta mierzonej w poziomie zwierciadła wody *B*, stąd w praktycznych obliczeniach można korzystać z następującego przybliżenia:

$$h_{sr} = \frac{A}{B} \approx R_h \tag{76}$$



Rys.39 Przekrój poprzeczny koryta naturalnego

Głębokość średnia $h_{śr}$ jest wysokością równoważnego prostokąta zbudowanego na szerokości B. Powyższe przyjęcie głębokości średniej zamiast promienia hydraulicznego jest w pełni uzasadnione gdy B ≥ 30 $h_{śr}$