

WYKŁAD 6

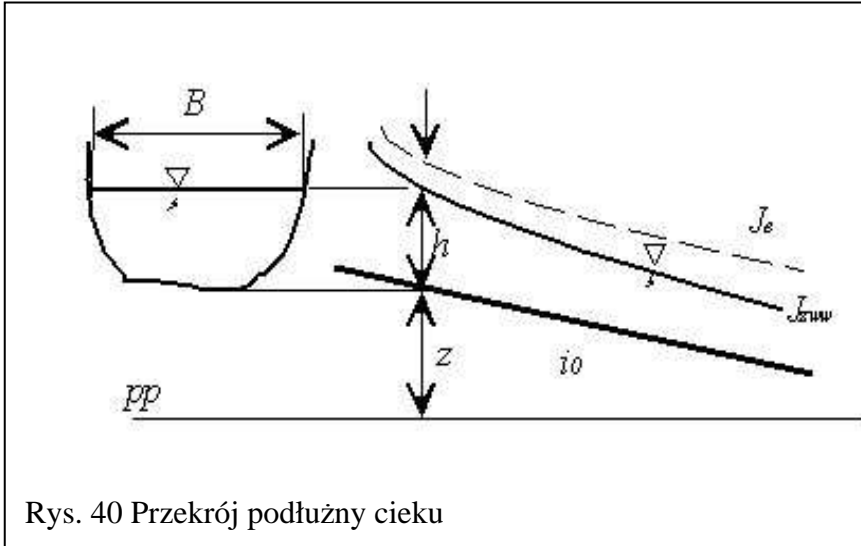
7.7. Ruch krytyczny

Dla każdego przekroju poprzecznego sumę energii odniesioną do jednostki masy

przeptywającej cieczy, liczoną od przyjętego poziomu porównawczego, można wyrazić w następujący sposób:

$$E_c = z + h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (77)$$

Wysokość położenia z jest dla danego koryta dla każdego przekroju ściśle określona, inaczej mówiąc stała, niezależna od warunków



Rys. 40 Przekrój podłużny cieku

przeptywu. Dla danego koryta parametry hydrodynamiczne głębokość i prędkość (h i v), czyli pole przekroju poprzecznego i wydatek (A i Q) mogą przybierać różne wartości. Dlatego też w wielu przypadkach korzystnym jest ograniczenie analizy do sumy energii tych wielkości zmiennych, czyli do wartości tzw. **energii rozporządzałnej**, określonej wyrażeniem:

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = E_c = h + \frac{\alpha Q^2}{2g A^2} \quad (78)$$

W analizie zależności (78) można rozpatrzeć dwa przypadki.

A ► Załóżmy, że przepływ jest stały $Q = const$, wtenczas zmienność energii rozporządzałnej opisuje funkcja jednej zmiennej niezależnej h , $E = E(h)$. Przebieg zmienności tej funkcji jest następujący:

gdy $h \rightarrow 0$ to $A \rightarrow 0$, stąd $E \rightarrow \infty$

gdy $h \rightarrow \infty$ to $A \rightarrow \infty$, stąd $E \rightarrow \infty$

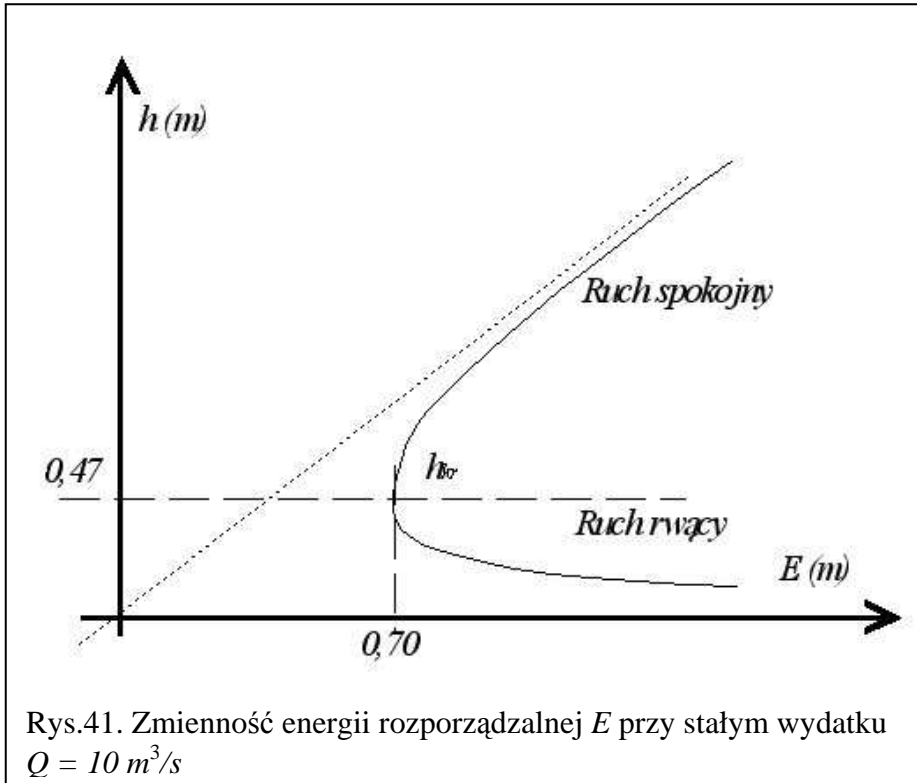
Głębokość wody h jest wielkością, która może przybierać tylko wartości dodatnie, czyli z powyższej analizy wynika, że musi występować minimum badanej funkcji $E(h)$.

Warunkiem wystąpienia ekstremum funkcji określonej równaniem (78) jest zerowanie pierwszej pochodnej:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{dA}{dh} = 0$$

ponieważ zachodzi zależność $dA = B dh$, to ostatecznie warunek występowania ekstremum (minimum) badanej funkcji przybiera postać:

$$\frac{A^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (79)$$



Rys.41. Zmienność energii rozporządzalnej E przy stałym wydatku $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$

W przypadku przyjęcia koryta prostokątnego, o szerokości w dnie $b = B = 10 \text{ m}$, którym płynie woda w ilości $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$, przebieg zmienności funkcji $E = E(h)$ przedstawiono na rys.41.

Głębokość która spełnia równanie (79) i przy której występuje minimum funkcji $E(h)$ nazywana jest głębokością krytyczną h_{kr} . Przepływ

przy większych głębokościach a więc i przy mniejszych prędkościach nazywany jest ruchem spokojnym, ruch odbywający się przy mniejszych głębokościach jednak przy większych prędkościach nazywany jest ruchem rwącym. W przykładzie przedstawionym na rys.41 głębokość krytyczna $h_{kr} = 0,467 \text{ m}$.

B ► Rozpatrzmy drugi możliwy wariant zmienności równania (78). Załóżmy, że jest określona stała wartość energii rozporządzalnej $E = const$, natomiast w zależności od zmiennej głębokości zmienia się ilość przepływającej cieczy czyli $Q = Q(h)$. Dla ułatwienia analizy równanie (78) można przekształcić do postaci:

$$Q^2 = \frac{2g}{\alpha} A^2 (E - h) \quad (80)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami w równaniu (80) zmienność przepływu Q jest zależna od jedynej zmiennej niezależnej h , której obszar zmienności mieści się w granicach $0 \leq h \leq E$. Przebieg zmienności tej funkcji jest następujący:

gdy $h \rightarrow 0$, to także $A \rightarrow 0$, w konsekwencji $Q \rightarrow 0$

gdy $h \rightarrow E$ to wartość zmiennej zależnej $Q \rightarrow 0$,

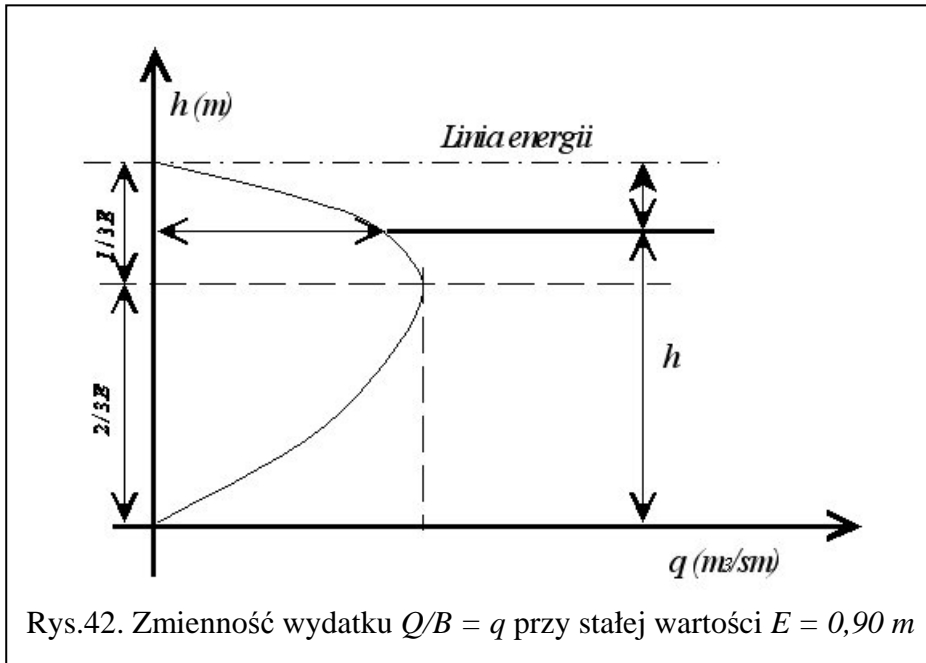
z czego wynika, że w obszarze zmienności h występuje ekstremum (maksimum) badanej funkcji. Warunkiem występowania ekstremum jest zerowanie pierwszej pochodnej, czyli

$$\frac{dQ^2}{dh} = \frac{2g}{\alpha} \left[2A \frac{dA}{dh} (E-h) - A^2 \right] = 0, \quad \text{gdzie } \frac{dA}{dh} = B$$

po podstawieniu za E wyrażenia (78) otrzymamy

$$\frac{A^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (81)$$

W przypadku przyjęcia jak w poprzednim przypadku koryta prostokątnego, o szerokości w dnie $b = B = 10 \text{ m}$, w którym dysponujemy stałą wartości energii rozporządzalnej $E = 0,90 \text{ m}$, przebieg funkcji (80) po jej spierwiastkowaniu pokazano na rys.42.



Rys.42. Zmienność wydatku $Q/B = q$ przy stałej wartości $E = 0,90 \text{ m}$

W przedstawionym na tym rysunku przypadku głębokość krytyczna spełniająca równanie (81) wynosi $h_{kr} = 0,60 \text{ m}$ - dla tej głębokości występuje maksymalny przepływ $q = 1,46 \text{ m}^3/\text{s},\text{m}$.

Należy zwrócić uwagę, że równania (79) i (81) są identyczne i wyrażenie to nazywamy

równaniem ruchu krytycznego a parametry hydrodynamiczne spełniające to równanie nazywamy **wielkościami krytycznymi**. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że **w ruchu krytycznym dla określonej wartości wydatku, wartość energii rozporządzalnej jest minimalna albo dla określonej wartości energii rozporządzalnej wydatek jest maksymalny**.

Jeżeli do równania ruchu krytycznego (równania. (78) i (81)) zamiast prędkości średniej $Q/A = v$ wstawimy wzór Manninga (równ. (64) str.35), możemy wyprowadzić równanie na spadek krytyczny postaci:

$$J = \frac{n^2 g \mathcal{X}^{\frac{4}{3}}}{\alpha B A^{\frac{1}{3}}} \quad (82)$$

Wyrażenie (82) określa jakie są straty jednostkowe energii w ruchu krytycznym albo jaki musi być spadek dna kanału aby dany wydatek krytyczny płynął ruchem jednostajnym.

W obliczeniach praktycznych często wygodnie jest posługiwać się pojęciem **głębokości średniej**, która jest ilorazem pola przekroju poprzecznego i szerokości koryta w zwierciadle wody: $h_{sr} = A / B$. W przypadku koryta o przekroju prostokątnym, głębokość średnia jest rzeczywistą głębokością napełnienia koryta. Po wprowadzeniu do równania ruchu krytycznego wyżej zdefiniowanej głębokości średniej, równanie to można sprowadzić do następujących postaci:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g B^2}} \quad (a), \quad v_{kr} = \sqrt{\frac{1}{\alpha} g h_{kr}} \quad (b), \quad h_{kr} = \frac{2}{3} E \quad (83)$$

W praktycznych obliczeniach w wyrażeniach powyższych przyjmuje się zwykle wartość $\alpha = 1$.

Rodzaj ruchu tzn. czy jest to ruch krytyczny, rwący czy spokojny w dogodny sposób opisuje bezwymiarowa **liczba Froude'a**:

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} g h}} \quad (84)$$

która wyraża stosunek prędkości średniej przepływającej wody do prędkości krytycznej.

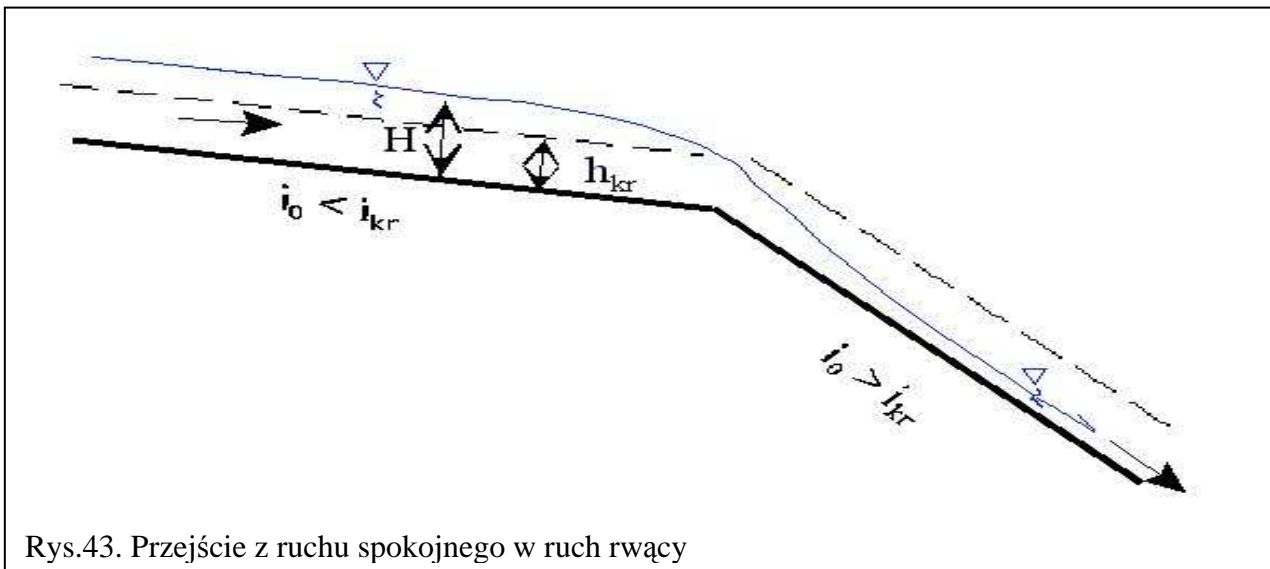
Gdy prędkość przepływającej wody jest prędkością krytyczną, to licznik jest równy mianownikowi czyli liczba Froude'a jest równa jedności co wynika wprost z równania ruchu krytycznego, stąd gdy: $F_r = 1$ jest to ruch krytyczny

$$F_r > 1 \text{ ruch rwący}$$

$$F_r < 1 \text{ ruch spokojny.}$$

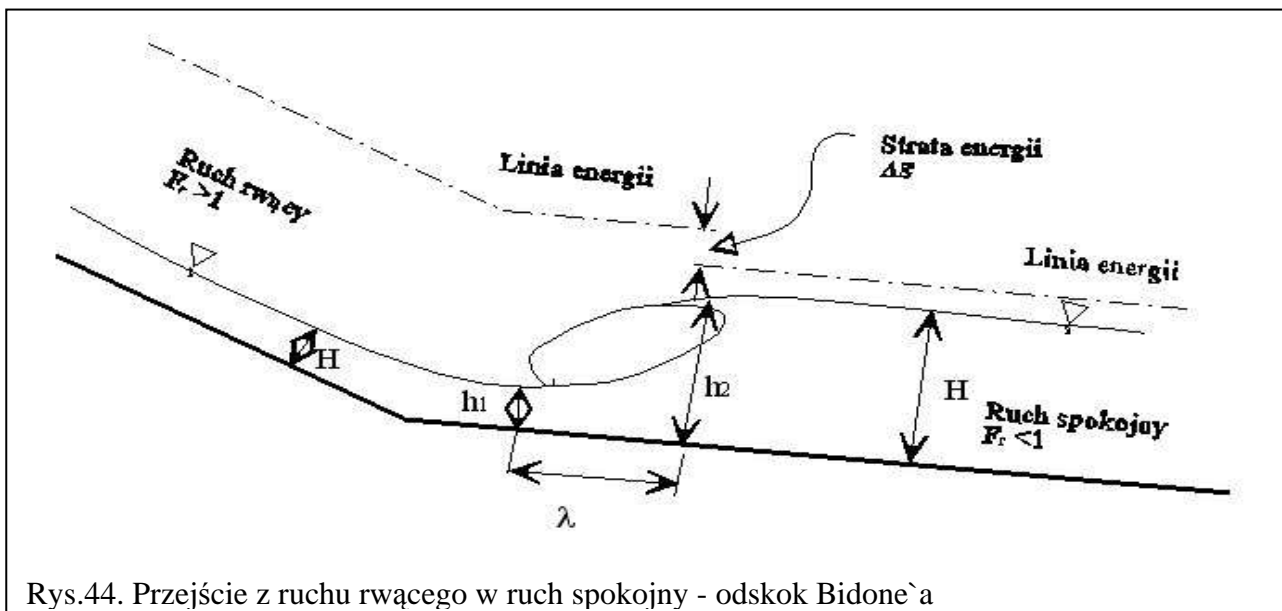
Na długich odcinkach koryta występuje z reguły ruch jednostajny, tzn. stan swego rodzaju równowagi zasobów energii danego cieku i strat energii wywołanych ruchem cieczy - straty energii na opory ruchu są równe różnicy poziomu dna cieku na rozpatrywanej długości tego cieku. Ten stan równowagi może być zakłócony gwałtowną zmianą spadku dna cieku. W zależności od wartości spadku przepływ jednostajny może być ruchem spokojnym lub rwącym a także ruchem krytycznym.

Na rys.43 pokazano przykład gwałtownego zwiększenia spadku dna cieku, przy czym górny odcinek ma spadek mniejszy od krytycznego, natomiast poniżej spadek jest większy od krytycznego. Zmiana charakteru przepływu z ruchu spokojnego w ruch rwący przebiega łagodnie, głębokości stopniowo maleją a prędkości stopniowo zwiększają się przybierając wartości krytyczne mniej więcej na granicy tych dwóch odcinków koryta.



Rys.43. Przejście z ruchu spokojnego w ruch rwący

Odmienne przebiega zmiana ruchu rwącego w ruch spokojny. W tym przypadku przejście jest gwałtowne, któremu towarzyszy zjawisko powstawania odskoku hydraulicznego, zwanego odskokiem Bidone`a, w postaci walca o obrotowym ruchu wody (por. rys. 44). Lokalizacja odskoku jest uwarunkowana występowaniem ściśle określonej pary głębokości przed i za odskokiem, głębokości h_1 i h_2 zwanych **głębokościami sprzężonymi**. Głębokości te związane są odpowiednią funkcją zwaną równaniem odskoku hydraulicznego.



Rys.44. Przejście z ruchu rwącego w ruch spokojny - odskok Bidone`a

Dla koryta o prostokątnym kształcie przekroju poprzecznego równanie to ma postać:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{8F_{r2}^2 + 1} - 1 \right), \text{ gdzie } F_{r2} = \frac{v_2}{\sqrt{g h_2}} \quad (85a)$$

albo

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{8 F_{r1}^2 + 1} + 1 \right), \text{ gdzie } F_{r1} = \frac{v_1}{\sqrt{g h_1}} \quad (85b)$$

W odskoku hydraulicznym powstają straty energii. Są to straty lokalne, których wartość można wyznaczyć z formuły:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2} \quad (86)$$

Do obliczenia długości odskoku z wielu różnych wzorów empirycznych można wykorzystać formułę **Smetany**

$$\lambda = 6(h_2 - h_1) \quad (87)$$