WYKŁAD 8

8. RUCH WÓD GRUNTOWYCH

8.1. Właściwości gruntu, prawo Darcy

Ruch wód gruntowych w ośrodku porowatym nazywamy filtracją. Do ośrodków porowatych zaliczamy grunt, skały, beton itp.

Woda zawarta w gruncie występuje pod różnymi postaciami (wody higroskopijnej, kapilarnej i in.). Jeśli woda wypełnia wszystkie pory gruntu to taki ośrodek nazywamy **nasyconym**, natomiast przy odpowiedniej wielkości porów część tej wody może porusza się pod wpływem siły ciężkości. Jest to tzw. **woda gruntowa (grawitacyjna)**.

Woda grawitacyjna, zwana też wodą wolną, może zalegać lub przepływać w warstwie wodonośnej przy swobodnym zwierciadle wody oddzielającym strefę obszaru nasyconego od strefy nie nasyconej; może także występowa pod ciśnieniem między dwoma warstwami gruntu nieprzepuszczalnego, i wtenczas nazywana jest **wodą artezyjską**.

Fizyczne właściwości gruntu zależą głównie od rodzaju, kształtu i wymiarów ziaren. Jednym z ważniejszych charakterystyk gruntu jest współczynnik porowatości przestrzennej n będący stosunkiem objętości porów gruntu do całej objętości danej próbki. Dla ziaren o jednakowej średnicy porowatość przestrzenna mieści się w granicach $0{,}259 < n < 0{,}476$. Orientacyjne współczynniki porowatości wynoszą: dla piasku $n = 0{,}30$ do $0{,}45$, dla gliny $n = 0{,}40$ do $0{,}55$ oraz dla torfu $n = 0{,}60$ do $0{,}80$.

W zależności od struktury danego gruntu rozróżniamy:

a) **grunty jednorodne** - struktura we wszystkich punktach jednakowa

b) **grunty niejednorodne** - struktura zależy od położenia punktu

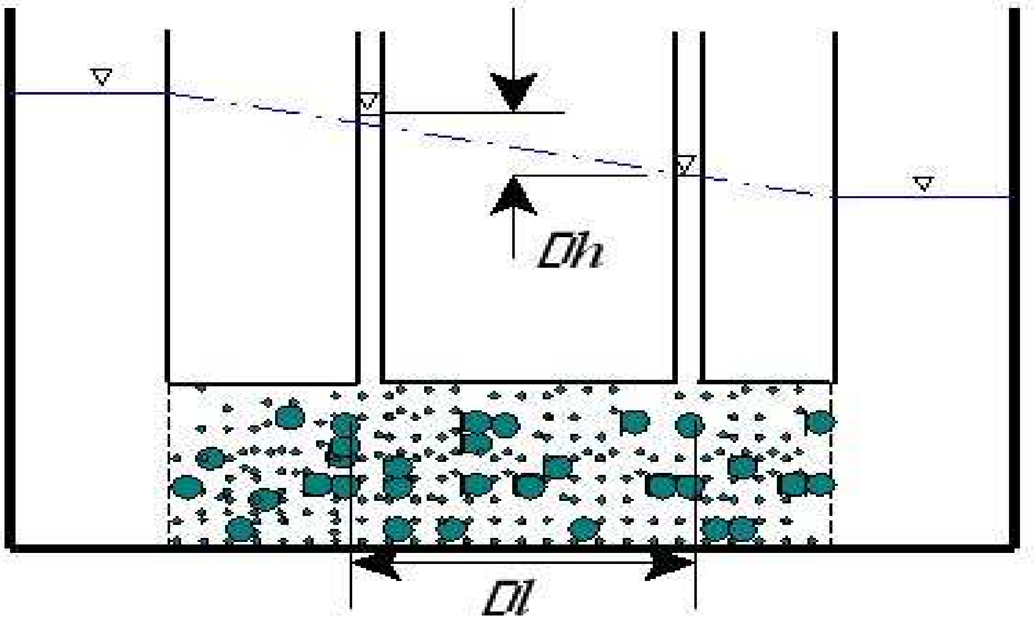
W zależności od struktury gruntu mogą być także różnie ukierunkowania właściwości hydraulicznych, stąd rozróżniamy:

a) **grunty izotropowe** -właściwości filtracyjne nie zależą od kierunku ruchu wody gruntowej

b) **grunty anizotropowe** - gdy zależność taka nie występuje.

Na podstawie przeprowadzonych doświadczeń Darcy opracował zależność między wydatkiem Q wody przepływającej przez bryłę gruntu a spadkiem ciśnienia piezometrycznego J będącego stosunkiem różnicy ciśnień H na długości przepływu l, przy czym l jest odległością między rozpatrywanymi przekrojami poprzecznymi czyli powierzchniami prostopadłymi do uśrednionej prędkości przepływu a nie rzeczywistą długością drogi przepływu wody między tymi przekrojami (rys. 49). Pod pojęciem prędkości filtracyjnej rozumiemy iloraz natężenia przepływu i całego pola powierzchni przekroju poprzecznego, stąd można napisać:

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta l} = \frac{d\,H}{d\,l}\;; \qquad v = \frac{Q}{A} \tag{95}$$



Rys. 49. Przepływ filtracyjny

Wykorzystując powyższe wielkości można następująco wyrazić prawo Darcy na prędkość filtracyjną:

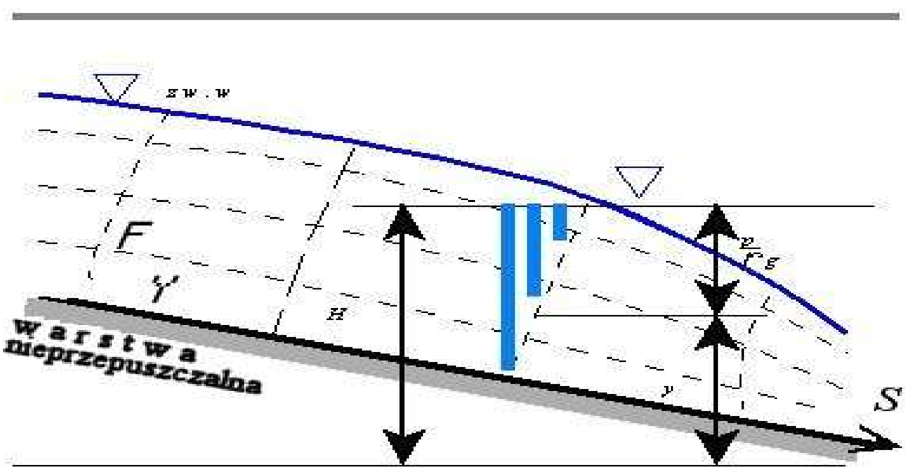
$$v = k \quad J \tag{96}$$

gdzie *k* jest współczynnikiem filtracji zależnym od rodzaju gruntu (wielkości i kształtu ziaren) oraz od rodzaju cieczy (gęstości i lepkości). Orientacyjne wartości współczynnika filtracji *k* są następujące:

rodzaj gruntu	współczynnik *k*	
piasek gruboziarnisty	10-2 cm/s	10 m/dobę
piasek	10-3 cm/s	1 m/dobę
piasek zwarty	10-4 cm/s	10 cm/dobę
glina piaszczysta	10-5 cm/s	1 cm/dobę
glina	10-6 cm/s	1 mm/dobę

Prawo Darcy jest ważne tylko dla przepływu laminarnego, gdy liczba Reynoldsa jest mała, tzn. $Re < 5$; jako charakterystyczny wymiar liniowy przyjmuje średnic ziarna gruntu d_{10}.

8.2. Przepływ wolno-zmienny, założenia Dupuita



Rys.50. Schemat rzeczywistego przepływu strumienia filtracyjnego

Na rys.50 przedstawiono teoretyczny schemat rzeczywistego przepływu strumienia filtracyjnego. Na rysunku przedstawiono linie prądu (krzywe Ψ) oraz krzywe jednakowego potencjału (krzywe Φ). Funkcja Ψ(x,y) określa wartość energii w danym punkcie. Ponieważ prędkość przepływu wody jest bardzo mała, to wysokość prędkości jest wielkością jeszcze mniejszą tak więc dla danego przekroju poprzecznego można napisać:

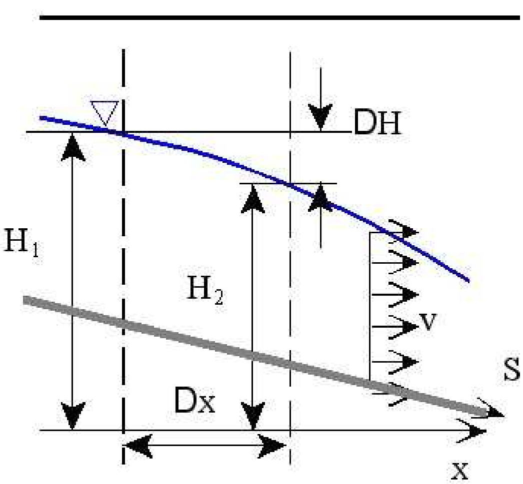
$$\Phi = H = y + \frac{p}{\rho g} \tag{97}$$

Wielkość *p* jest ciśnieniem piezometrycznym z pominięciem ciśnienia atmosferycznego. Dla punktów krzywej depresji *H* = *y*.

Dla rozwiązywania ruchu wolnozmiennego wg **Dupuita** można przyjąć następujące założenia upraszczające (rys.51):

a) przekroje poprzeczne są płaskie (mała krzywizna),

b) przekroje poprzeczne są pionowe (mały spadek i_o podścielającej warstwy nieprzepuszczalnej).



Rys. 51. Uproszczony schemat Dupita

Uogólniając prawo Darcy można napisać:

$$v = k\frac{d\Phi}{d\,s} \Rightarrow v_x = \frac{\delta\Phi}{\delta\,x}\;; \qquad v_y = \frac{\delta\Phi}{\delta\,x}$$

Wychodząc z tych zależności, przy założeniach Dupuita gdy $-d\Phi = -dH = H_2 - H_1$, oraz $J = -\,dH/d = const.$ dla danego przekroju poprzecznego, otrzymujemy $v_y = 0$, $v_x = v$, czyli:

$$v = k\left|\frac{d\,H}{d\,x}\right| \tag{98}$$

Jest to równanie Dupuita, gdzie v jest prędkością filtracyjną stałą w całym przekroju poprzecznym. Na rys.51 przedstawiono wykres prędkości, który uwidacznia skutek przyjętych założeń - rozbieżność kierunków prędkości i kierunków brzegowych linii prądu przy dnie strumienia i na powierzchni zwierciadła wody.

8.3. Ogólne równania ruchu wolno-zmiennego

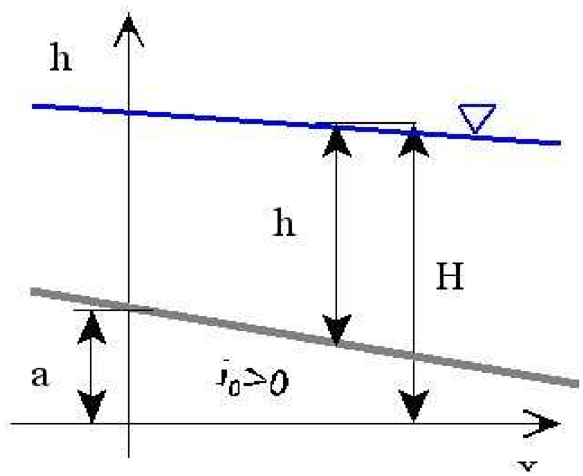
Zgodnie z oznaczeniami przedstawionymi na rys.52 możemy napisać:

$H = a - i_o\,x + h$

gdzie i_o spadek spągu warstwy wodonośnej, h głębokość strumienia cieczy. Przy przyjęciu założeń Dupuita spadek energii wynosi

$$J = -\frac{d\,H}{d\,x} = i_o - \frac{d\,h}{d\,x} \tag{99}$$

Wstawiając powyższą zależność do równania (98) otrzymamy ogólne wyrażenia na prędkość filtracyjną v i jednostkowy wydatek q

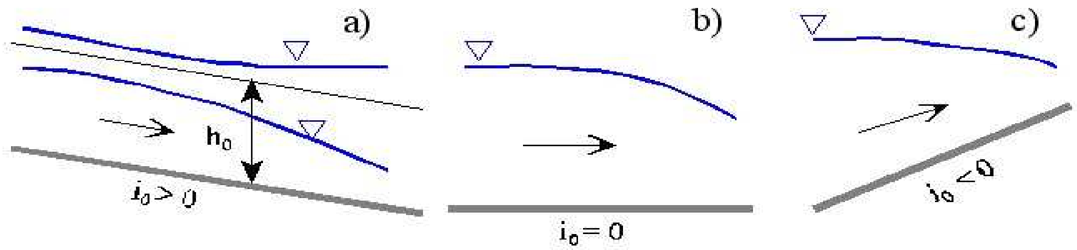


Rys.52. Schemat ruchu wolnozmiennego

$$v = k\left(i_o - \frac{d\,h}{d\,x}\right) \quad (a)\;; \qquad q = hk\left(i_o - \frac{d\,h}{d\,x}\right) \quad (b) \tag{100}$$

Z przedstawionych wyżej równań można wyznaczyć także układ zwierciadła wody gruntowej, gdy znany jest wydatek jednostkowy q, współczynnik filtracji k oraz spadek stropu warstwy nieprzepuszczalnej i_o.

Występują cztery różne przypadki przebiegu zwierciadła wody gruntowej przedstawione na rys.53. Wszystkie przypadki opisane są tym samym ogólnym równaniem (100b), przy



Rys.53. Układ zwierciadła wody gruntowej

uwzględnieniu odpowiedniej wartości i znaku spadku spągu warstwy wodonośnej i_o.
Końcowa postać równania (100b) po scałkowaniu jest różna w zależności od wartości spadku i_o.

Przypadek gdy $i_o > 0$

Wykorzystujemy zależność $q = k\, h_o\, i_o$ która opisuje przepływ jednostajny przy stałej głębokości h_o, którą nazywamy głębokością normalną. Po podstawieniu w miejsce q w równaniu (100b) tej zależności oraz przyjęciu nowej zmiennej $\eta = h / h_o$ otrzymujemy następujące równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych:

$$\frac{i_o\, dx}{h_o} = \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta \tag{101}$$

Po scałkowaniu w granicach od η_1 do η_2 dla x_1 i x_2 otrzymujemy końcowe równanie

$$\frac{i_o 1}{h_o} = \eta_2 - \eta_1 + 1n \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \tag{102}$$

gdzie $l = x_2 - x_1$.

Przypadek gdy $i_o = 0$:

Z równ. (100b) przy przyjęciu $i_o = 0$ otrzymujemy wprost równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych $q\, dx = -\, h\, k_o\, dh$, które po scałkowaniu w granicach od h_1 do h_2 dla x_1 i x2, przy $l = x_2 - x_1$ przedstawia się następująco:

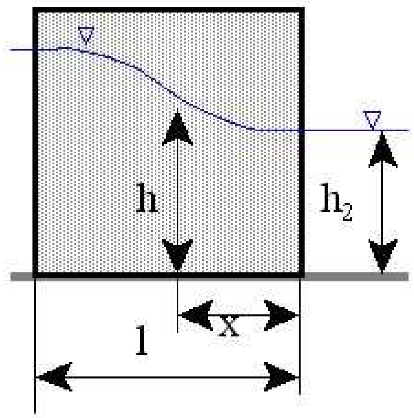
$$q = k \frac{h_1{}^2 - h_2{}^2}{2\; l} \tag{103}$$

Dla wyznaczenia krzywej depresji przyjmujemy: $h_1 = h$, $l = x$ (por. rys.54). Po wstawieniu tych wielkości do równ. (103) i rozwikłaniu ze względu na zmienną wielkość h otrzymujemy:

$$h = \sqrt{h_2^{\ 2} + \frac{q}{k} 2\, x} \qquad (104)$$

Wstawiając do tego wyrażenia wielkość *q/k* wyznaczoną równ. (103) otrzymujemy:

$$h = \sqrt{h_2^{\ 2} + \left(h_2^{\ 2} - h_2^{\ 2}\right)\frac{x}{l}} \qquad (105)$$

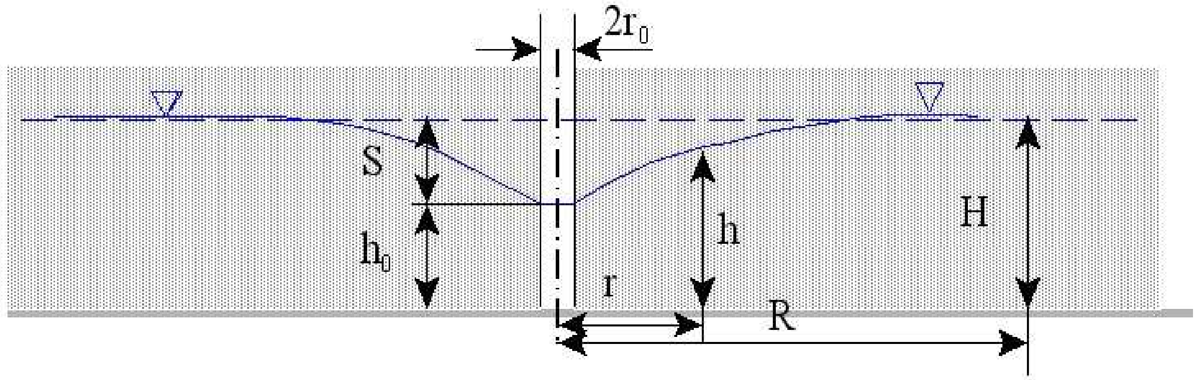


Rys.54. Przepływ filtracyjny przez pryzmę gruntu

Jest to równanie krzywej depresji przy filtracji wody przez pryzmę gruntu. Warto zauważyć, że w przypadku rozpatrywanego przepływu ustalonego układ zwierciadła wody nie zależy od współczynnika filtracji czyli nie zależy od rodzaju gruntu.

8.4. Osiowo-symetryczny dopływ do studni

Na rys.55 przedstawiono schemat ustalonego dopływu wody do studni zupełnej tzn. zagłębionej do stropu poziomej warstwy nieprzepuszczalnej. Przyjęto następujące oznaczenia:



Rys.55. Schemat dopływu do studni

h_o - głębokość wody w studni, *s* - depresja w studni tzn. obniżenie zw.w. w stosunku do pierwotnego położenia na wysokości *H*, r_o - promie studni.

Wydatek studni *Q* obliczamy następująco:

$$Q = A v = \left(2\pi r\, h\right)\left(k\,\frac{dh}{dr}\right)$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu w granicach od h_o do *h* dla odpowiednio r_o i *r* otrzymujemy końcowy wzór:

$$Q = \pi k \frac{h^2 - h_o^{\ 2}}{\ln \dfrac{r}{r_o}} \tag{106}$$

Zgodnie z przedstawioną zależnością można określić wydatek studni jeżeli znane są parametry studni i charakterystyka gruntu oraz znane współrzędne (r,h) dowolnego punktu zwierciadła wody gruntowej w zasięgu oddziaływania studni. Bardzo często jako znany punkt krzywej depresji przyjmuje się $r = R$, $h = H$, tzn. przyjmuje się, że w zasięgu oddziaływania studni R zwanym zasięgiem depresji, położeniu zwierciadła wody gruntowej znajduje się na pierwotnym, statycznym poziomie.

Dla przybliżonego określenia zasięgu depresji można posłużyć się wzorem Sichardta

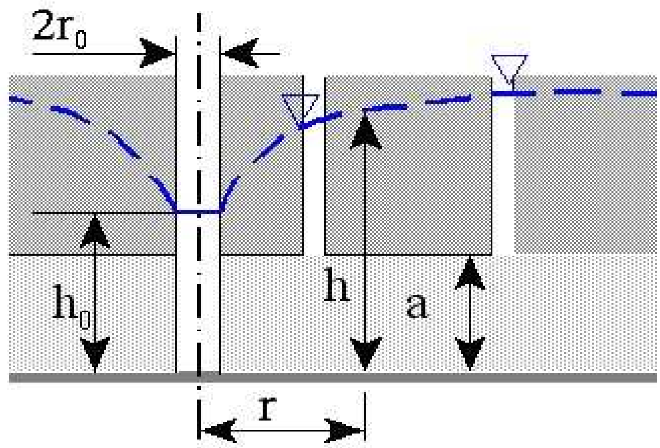
$$R = 3000\, s \sqrt{k} \tag{107}$$

gdzie R - zasięg depresji (*m*), s - depresja w studni (*m*) oraz k -współczynnik filtracji (*m/s*).

8.5. Dopływ do studni artezyjskiej

Gdy woda dopływa do studni warstwą wodonośną o określonej miąższości a i głębokość wody w studni $h_o > a$ to dopływ wody odbywa się pod ciśnieniem i studnię taką nazywamy studnią artezyjską (por. rys. 56).

W tym przypadku $Q = A\ v = 2\pi\ r\ a\ k\ dh/dr$, stąd po rozdzieleniu zmiennych, scałkowaniu w granicach od h_o do H dla odpowiednio r_o i R otrzymujemy zależność;



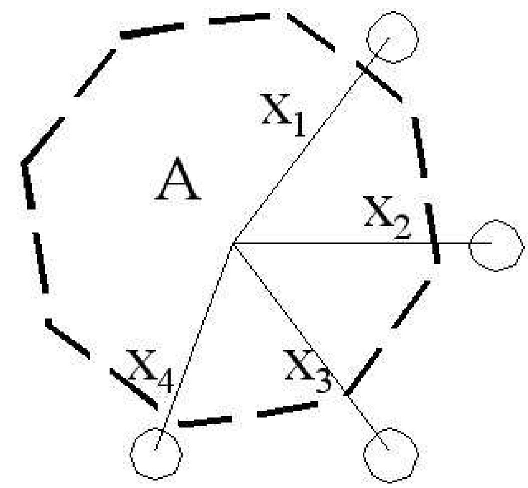
Rys. 56. Studnia artezyjska

$$Q = \frac{2\pi a k}{\ln \dfrac{R}{r_o}} \left(H - h_o \right) \tag{108}$$

gdzie H jest pierwotnym ciśnieniem statycznym a R zasięgiem depresji.

8.6. Zespół studni

Dość często zachodzi konieczność okresowego obniżenia poziomu wody gruntowej. W takich przypadkach instaluje się określoną liczbę studni (por. rys. 57), przy czym zadana jest zwykle wymagana rzędna obniżenia poziomu wody gruntowej, liczona od spągu warstwy wodonośnej i charakterystyka gruntu a drogą obliczeń należy dobrać liczbę potrzebnych studni i ich łączny wydatek.



Rys. 57. Zespół studni

Punktem wyjścia jest wzór na wydatek pojedynczej studni (równ. 107) zastosowane przy następujących założeniach: wszystkie studnie mają tą samą średnicę *2r* i każda z nich ma ten sam wydatek *Q/n*. Rzędną obniżonego poziomu wody gruntowej Z_A w dowolnym punkcie znajdującym się w obszarze oddziaływania zespołu studni można wyznaczyć ze wzoru:

$$Z_A^2 = H^2 - \frac{Q}{\pi k}\left[\ln R^* - \frac{1}{n}\ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \,.....x_n\right)\right] \tag{109}$$

gdzie *H* jest rzędną pierwotnego poziomu wody gruntowej a R* zasięgiem depresji zespołu studni wyznaczanej wzorem Kusakina:

$$R^* = 575\, s \sqrt{H\, k} \tag{110}$$

gdzie *s* - depresja w środku ciężkości układu zespołu studni (*m*),
k - współczynnik filtracji (*m/s*).