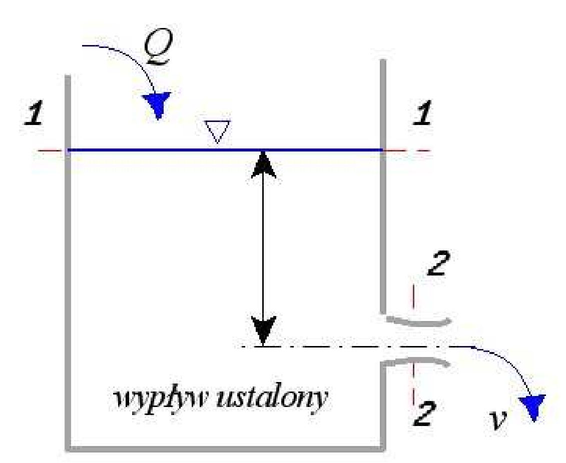
WYKŁAD 9

9. PRZEPŁYW NIEUSTALONY

9.1. Wypływ wody ze zbiornika

Rozpatrzmy prosty przypadek wypływu wody ze zbiornika przez mały otwór w bocznej ściance (rys.58) w warunkach ruchu ustalonego. Dzięki doprowadzaniu do zbiornika tej samej ilości wody jaka wypływa przez otwór, poziom wody w zbiorniku jest stały. Do określenia prędkości wypływu można wykorzysta równanie Bernoulliego opisujące ruch cieczy w warunkach ruchu ustalonego (trwałego). Dla strugi cieczy idealnej, dla przyjętych dwóch przekrojów **1-1** i **2-2** jak na rysunku, równanie to przybiera postać:



Rys. 58 Wypływ cieczy ze zbiornika

$$h+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{v_o^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}$$

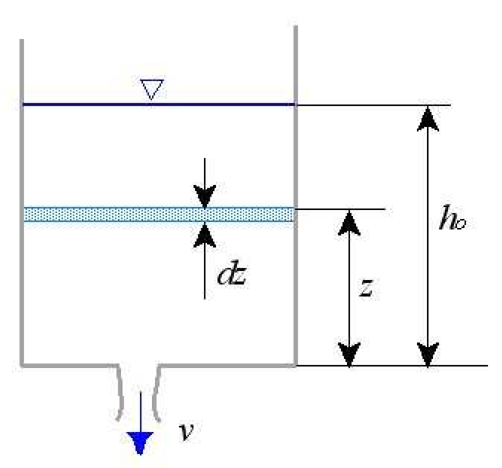
Przy założeniu, że pole przekroju poprzecznego zbiornika A jest dużo większe od pola przekroju otworu wylotowego a_o, można przyjąć zerową wartość wysokości prędkości w przekroju **1-1**, tzn. $v^2/2g = 0$.

Z powyższego równania można wyznaczyć prędkość wypływu wody v i wydatek Q:

$$v=\varphi\sqrt{2gh}, \qquad Q=\mu a_o\sqrt{2gh} \qquad (111)$$

Z zależności (111) można skorzystać przy rozwiązywaniu zagadnienia opróżniania zbiornika a więc zagadnienia ruchu nieustalonego. Ze zbiornika o polu przekroju poziomego A wypływa woda przez otwór w dnie o polu a_o (rys.59). Zależności (111) opisują chwilową prędkość wypływu v i chwilowy wydatek Q w chwili t, gdy poziom wody w zbiorniku znajduje się na wysokości z:

$$v(z)=\varphi\sqrt{2gz} \qquad (112)$$



Rys.59 Opróżnianie zbiornika

$$Q(z) = \mu\, a_o \sqrt{2\, g\, z} \tag{113}$$

W czasie *dt* przez otwór w dnie wypłynie woda w ilości *dV = Q(z) dt* oraz obniży się zwierciadło wody w zbiorniku o *dz*, co spowoduje ubytek wody o objęto *dV = A dz*. Z porównania tych objętości otrzymujemy równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$dt = \frac{A}{Q(z)} dz = \frac{A}{\mu\, a_o \sqrt{2\, g\, z}} dz \tag{114}$$

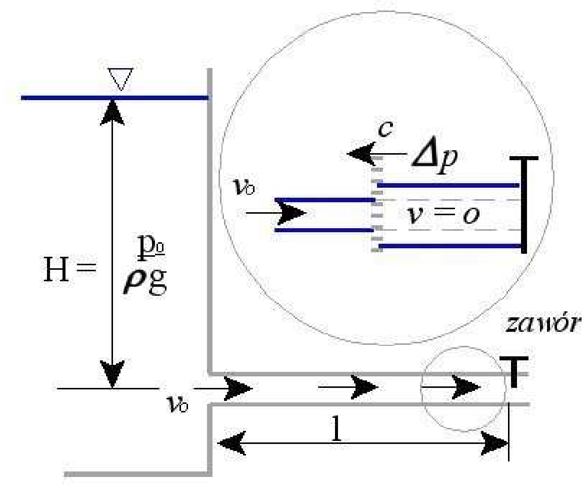
Po scałkowaniu w granicach od t_o do t_1 i od h_1 do h_o otrzymamy czas $t = t_1 - t_o$ w jakim poziom wody w zbiorniku opadanie od napełnienia h_o do napełnienia h_1 (zależność (115a), lub w przypadku przyjęcia $h_1 = 0$ otrzymamy czas T całkowitego opróżnienia zbiornika od początkowego napełnienia h_o (115b)

$$(a): \quad \Delta t = \frac{A}{\mu\, a_o \sqrt{2\, g}} \left[\sqrt{h_o} - \sqrt{h_1}\right] \qquad\qquad (b): \quad T = \frac{2A}{\mu\, a_o} \sqrt{\frac{h_o}{2\, g}} \tag{115}$$

9.2 Uderzenie hydrauliczne

Załóżmy, ze przez odpowiednio długi rurociąg płynie woda ustaloną prędkością średnią v_o. Rurociąg zasilany jest ze zbiornika o stałym ciśnieniu a na końcu rurociągu znajduje się zawór. Przyjmijmy, że w pewnym momencie nastąpi nagłe zamknięcie zaworu odcinające wypływ wody z rurociągu.

Zgodnie z doświadczeniem cząsteczki wody przed zaworem zostaną zatrzymane czyli ich poprzednia prędkość przepływu spadnie do wartości zerowej (v_o $v = 0$) i jednocześnie nastąpi dość znaczne zagęszczenie cieczy oraz bardzo duży przyrost ciśnienia o p powodujący odkształcenie rurociągu (rys. 60). Zjawisko to nazywane jest **uderzeniem hydraulicznym.** To gwałtowne unieruchomienie cząsteczek cieczy nie nastąpi w tym samym momencie na całej długości rurociągu; w części przewodu ciecz będzie unieruchomiona, natomiast w pozostałej części będzie w dalszym ciągu poruszać się z dotychczasową prędkością v_o. Granica strefy cieczy unieruchomionej i cieczy płynącej będzie się przesuwać w kierunku wlotu do rurociągu z prędkością *c*, zwaną **prędkością rozprzestrzeniania się fali uderzenia**.



Rys. 60 Uderzenie hydrauliczne dodatnie

Przy nagłym zamknięciu przewodu w którym płynęła ciecz następuje przyrost ciśnienia i takie zjawisko nazywamy **uderzeniem dodatnim**. Występuje też zjawisko uderzenia hydraulicznego, gdy w rurociągu połączonym ze zbiornikiem o odpowiednim ciśnieniu znajduje się woda stojąca i nastąpi nagłe otwarcie zaworu znajdującego się na końcu tego rurociągu. Nagłemu uruchomieniu cząsteczek wody towarzyszy spadek ciśnienia i takie zjawisko nazywamy **uderzeniem ujemnym**.

Opisane zjawisko jest przykładem **ruchu nieustalonego**, w którym parametry ruchu (prędkość, ciśnienie) zmieniaj się w czasie. Można je opisać matematycznie jedynie w przypadku gdy uwzględni się **ściśliwość cieczy** a więc w przeciwieństwie w stosunku do dotychczasowych rozważań należy przyjąć, że gęstość cieczy $\rho \neq const.$

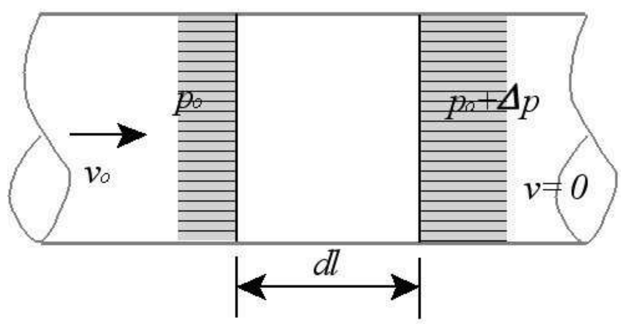
Podstawowe parametry opisujące uderzenie hydrauliczne można wyznaczyć przy następujących założeniach:

(a) zbiornik doprowadzający jest duży i w całym czasie trwania zjawisk poziom zw. w. w zbiorniku jest stały

(b) średnica rurociągu *D* oraz grubość ścianki *e* na całej jego długości jest stała

(c) przed zamknięciem zaworu występuje ruch jednostajny i trwały t.zn. $v_o = const$

(d) następuje nagłe zamknięcie zaworu tj. czas zamknięcia $tz = 0$



Rys. 61 Zatrzymanie cząsteczek cieczy

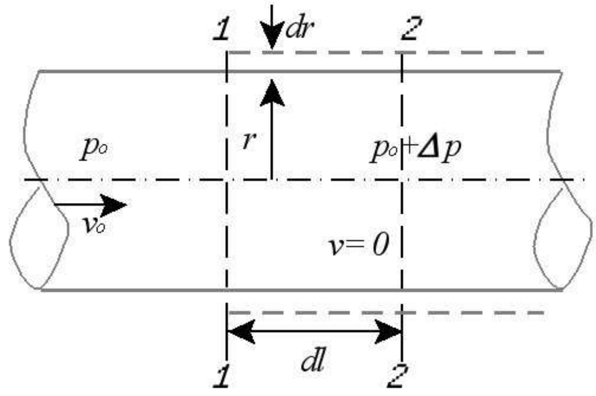
Dzięki sprężystości cieczy po zamknięciu zaworu nie nastąpi nagłe zatrzymanie ruchu na całej długości rurociągu. Rozpatrzmy odcinek rurociągu o długości *dl* (rys. 61). Po lewej stronie wydzielonego odcinka ciecz płynie jeszcze z prędkością v_o, natomiast z prawej strony prędkość jest zerowa i nastąpi wzrost ciśnienia o Δp. W czasie *dt* nastąpiło zatrzymanie ruchu ($v_o \rightarrow 0$) na odcinku *dl* a więc dla masy $\rho \cdot A \cdot dl$ wystąpiła zmiana ilości ruchu pod wpływem sumy sił działających w kierunku ruchu, czyli

$$\left[p_o\, A - \left(p_o + \Delta\, p\right) A\right] dt = \rho\, A\, d1 \left(0 - v_o\right) \qquad (116)$$

Dzieląc obie strony równania przez *dt*, otrzymamy po prawej stronie wyrażenie $dl / dt = c$, które jest prędkością rozprzestrzeniania się fali uderzenia. Wykonując działania w nawiasie po lewej stronie równania, otrzymamy wyrażenie na przyrost ciśnienia przy nagłym zamknięciu zaworu, zwanym **uderzeniu prostym**:

$$\Delta\, p = \rho\, c\, v_o \qquad (117)$$

Z powyższego równania wynika, że przyrost ciśnienia w uderzeniu prostym nie zależy od wartości pierwotnego ciśnienia ani od długości rurociągu, czyli przy dokonanych założeniach jego warto będzie taka sama na końcu rurociągu przy zaworze i na początku rurociągu na wlocie.



Rys. 62 Odkształcenie rurociągu

Rozpatrzmy zjawisko odkształcenia rurociągu jako skutek wzrostu ciśnienia cieczy w rurociągu o wartość Δp. Wskutek przyrostu ciśnienia przekrój poprzeczny rurociągu A wzrośnie do przekroju $A + dA$ oraz wzrośnie gęstość cieczy z wartości ρ do wartości $\rho + dp$. Na rozpatrywanym odcinku rurociągu o długości dl (rys. 62) masa przed zatrzymaniem ruchu wynosi $\rho \pm A\,dl$ natomiast po zatrzymaniu wzrośnie do masy $(\rho + dp)(A + dA)\,dl$. Ta nadwyżka masy dopłynie do rozpatrywanego odcinka w czasie dt przez przekrój n-n, czyli:

$(\rho + dp)(A + dA)\,dl - \rho A\,dl = v_o A\,dt$

Po rozwinięciu nawiasów, zredukowaniu i odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu $(dp \cdot Da \cdot dl = 0)$ otrzymamy:

$$\frac{dl}{dt} = c = \frac{\rho v_o A}{\rho\, dA + A\, d\rho} = \frac{v_o}{\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}} \qquad (118)$$

Wychodząc z definicyjnej zależności opisującej ściśliwość cieczy można napisać, że $d\rho/\rho = \Delta p/K$, gdzie K jest współczynnikiem sprężystości cieczy, natomiast wychodząc z prawa Hooka można otrzyma zależność $dA/A = D \cdot \Delta p/eE$, gdzie E jest współczynnikiem sprężystości materiału tworzącego rurociąg, D jego średnica i e grubość ścianki. Wstawiając te zależności przy jednoczesnym zastąpieniu Δp wyrażeniem (117) wzór (118) można sprowadzić do postaci

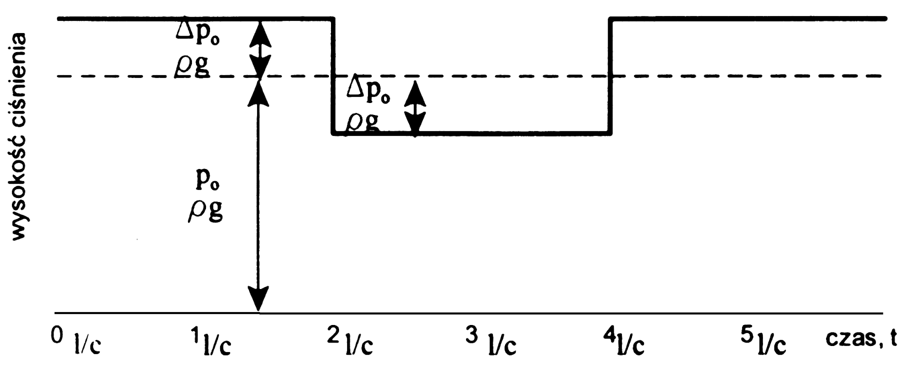
$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}\,\frac{1}{\frac{DK}{eE} + 1}} \qquad (119)$$

Zgodnie z wyliczoną wyżej prędkością rozprzestrzeniania się fali uderzenia, po czasie $t = l/c$, gdzie l jest długością rurociągu, czoło fali uderzenia dojdzie do początku rurociągu i w tym momencie ciśnienie w rurociągu jest o Δp większe od ciśnienia w zbiorniku. Spowoduje to ruch cieczy w przeciwnym kierunku i przy pominięciu strat hydraulicznych ruch cieczy odbywa się z tą samą prędkością v_o i przy tym samym ciśnieniu jak przed zamknięciem zaworu.

Tab. Przeciętne wartości współczynników sprężystości

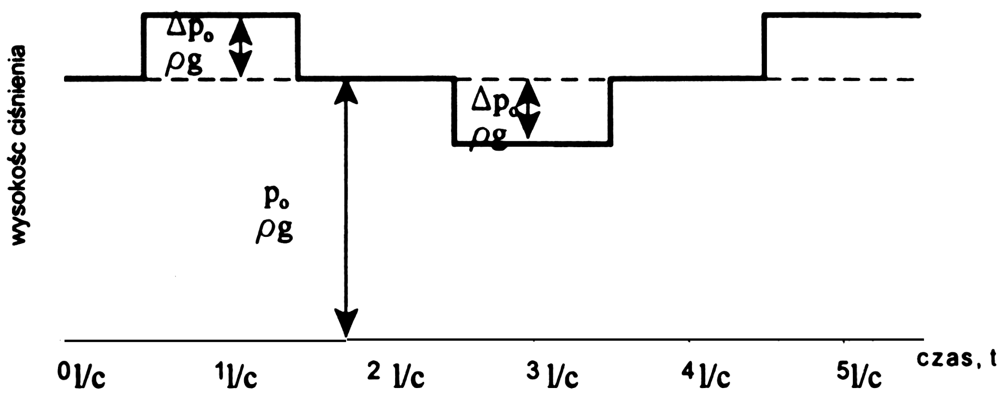
Materia	K, E [Pa]	K/E
woda	2 ± 10^{9}	-
stal	$2 \cdot 10^{11}$	0,01
żeliwo	$1 \cdot 10^{11}$	0,02
beton	$2 \cdot 10^{10}$	0,1
drewno	$1 \cdot 10^{10}$	0,2
szkło	$6,5 \cdot 10^{9}$	0,3

Po kolejnym czasie $t = l / c$ granica między cieczą płynącą w kierunku do zbiornika dochodzi do zaworu i wtenczas następuje faza uderzenia ujemnego: wskutek zatrzymania ruchu i rozprężenia cieczy ciśnienie zmniejsza się o wartość Δp poniżej ciśnienia przed zamknięciem i ponownie czoło fali uderzenia przesuwa się w kierunku początku rurociągu z tą samą prędkością c. Wykres



Rys. 63 Przebieg zmian ciśnienia w punkcie przy zaworze

zmienności ciśnienia w punkcie przy zaworze i w połowie rurociągu przedstawiono na rys. 63 i 64. Czas $T = 2\,l / c$ nazywamy **okresem fali uderzenia.**



Rys. 64 Przebieg zmian ciśnienia w połowie rurociągu

Praktycznie czas zamykania zaworu jest większy od zera. Jednak gdy czas zamknięcia zaworu $t_z \leq T$, przyrost ciśnienia osiąga wartość maksymalną jak przy uderzeniu prostym, zgodnie ze wzorem (117). Gdy czas zamknięcia zaworu $t_z > T$ wtenczas występuje tzw. **uderzenie złożone**, w którym przyrost ciśnienia jest mniejszy w porównaniu z uderzeniem prostym. Zgodnie z doświadczeniami **Żukowskiego** można przyjąć, że w przyrost ciśnienia p w uderzeniu złożonym do ciśnienia maksymalnego p_{max} występującego przy nagłym zamknięciu wynosi $p/p_{\max} = T/t_z$. Wstawiając tu wyrażenie (117) na maksymalny przyrost ciśnienia przy uderzeniu prostym otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{2 \rho v_o l}{t_z} \tag{120}$$

jest to wzór **Michauda** na przyrost ciśnienia przy uderzeniu złożonym.

Przykłady

Dla rurociągu niesprężystego (brak odkształcenia przy wzroście ciśnienia) $E = \infty$, prędkość rozprzestrzeniania się fali uderzenia zgodnie ze wzorem (118) wyniesie:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{2 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-3}} = 1410\, m/s$$

Jest to prędkość rozchodzenia się fali dźwięku w wodzie.

(a) Rurociąg stalowy o średnicy $D = 10\ cm$ i grubości scianki $e = 2\ mm$:

$$\frac{D}{e}\,\frac{K}{E} = \frac{0{,}10}{0{,}002}\,0{,}01 = 0{,}5 \qquad c = \frac{1410}{\sqrt{0{,}5 + 1}} = 1155\, m/s$$

Zgodnie ze wzorem (117) przyrost ciśnienia przy początkowej prędkości przepływu wody $v_o = 1{,}5\ m/s$ i przy uderzeniu prostym wyniesie:

$$\Delta p = \rho\, c\, v_o = 10^3 \cdot 1155 \cdot 1{,}5 = 1732\ kPa = 176{,}6\ mH_2O$$

(b) Rurociąg żelbetowy o średnicy $D = 50\ cm$ i grubości ścianki $e = 5\ cm$

Przyrost ciśnienia, podobnie jak poprzednio, przy prędkości początkowej $v_o = 1{,}5\ m/s$ i przy uderzeniu prostym będzie równy:

$$\Delta p = 1000 \cdot 1000 \cdot 1{,}5 = 1500\ kPa = 152{,}9\ mH_2O$$