

# **RUCH WOLNOZMIENNY W KORYTACH PRYZMATYCZNYCH**

ANALIZA UKŁADU ZWIERCIADŁA WODY I PRZYKŁADY OBLICZEŃ

- Metoda graficzno-całkowa
- Metoda Czarnowskiego
- Metoda Bakhmeteffa

Opracował:

dr inż. Paweł Zawadzki

## 1. Ruchu wolnozmienny, równanie i analiza profilu zwierciadła wody

Ruchem wolnozmiennym (*gradually varied flow*) w korytach otwartych nazywamy taki przepływ, w którym parametry ruchu zmieniają się na długości koryta  $s$ . W przypadkach stosunkowo niedużych zmian na długości ciek, można założyć, że kolejne przekroje są do siebie równoległe i pionowe, czyli nie uwzględniamy składowych pionowych średniej w poszczególnych przekrojach. O **korycie przyzmatycznym** (*prismatic channel*) mówimy gdy kształt koryta jest stały, niezmienny na długości, a wszystkie parametry ruchu w danym przekroju ciek można wyrazić jako funkcje napelnienia koryta:  $A = f(h)$ ,  $B = f(h)$ ,  $v = f(h)$  natomiast jedyną zmienną zależną wprost od długości ciek  $s$  pozostaje głębokość napelnienia koryta czyli  $h = f(s)$ .

Ruch zmienny ustalony powstaje:

- w koryta przyzmatycznych  $i_0 > 0$ , ruch zmienny występuje w przypadkach gdy zewnętrzna przyczyna spowoduje powstanie innych głębokości niż w ruchu jednostajnym:

**1. Piętrzenie wody 2. Zmiana spadku dna 3. Wypływ spod zasuw** (1, 2, 3 – strefa w Tab. 1 lub 2)

- w korytach przyzmatycznych  $i_0 \leq 0$ ; (w takim przypadku traci sens równanie Chezy) możliwy jest tylko ruch zmienny;

- w korytach nie przyzmatycznych, które zmieniają swoją szerokość.

Układ zwierciadła wody klasyfikowany jest w zależności od spadku dna i głębokości w sposób następujący:

$$i_0 > 0$$

- $i_0 < i_{kr}$  spadek dna jest **łagodny** (*mild – M*), wtenczas zachodzi nierówność  $H > h_{kr}$
- $i_0 = i_{kr}$  spadek dna jest **krytyczny** (*critical – C*) gdy  $H = h_{kr}$
- $i_0 > i_{kr}$  spadek jest **stromy** (*steep – S*) jeśli  $H < h_{kr}$

Dodatkowo wyróżniane są jeszcze dwa przypadki:

$i_0 = 0$  kanału o dnie **poziomym** (*horizontal channel – H*)

$i_0 < 0$  kanał o spadku **odwrotnym** (*adverse – A*) gdy skłon dna jest przeciwny do kierunku przepływu wody.

Ogólne równanie **ruchu wolnozmiennego** dla kanału przyzmatycznego możemy zapisać:

$$\frac{dh}{ds} = i_0 \frac{1 - \frac{Q^2}{A^2 \cdot c^2 \cdot R_h \cdot i_0}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3}} = \frac{J_0 - J_e}{1 - F_r^2} = \frac{\text{Licznik}}{\text{Mianownik}}$$

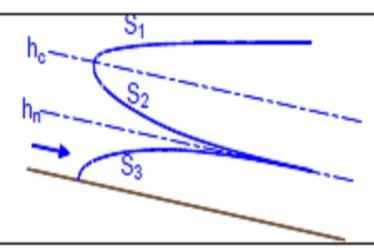
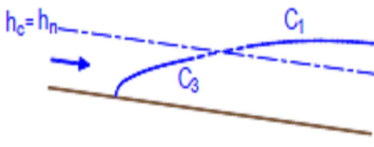
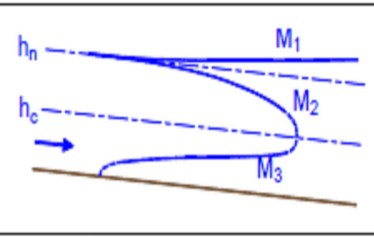
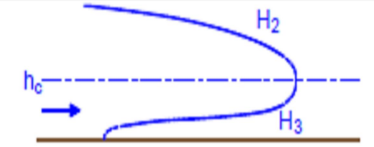
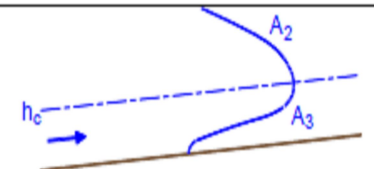
gdzie:

$dh/ds$  - spadek zwierciadła wody względem dna,

$J_0$  - spadek dna,

$J_e$  - spadek linii energii,

$$F_r - \text{liczba Froude'a, } F_r = \frac{v}{\sqrt{\frac{I}{\alpha} g \frac{A}{B}}}$$

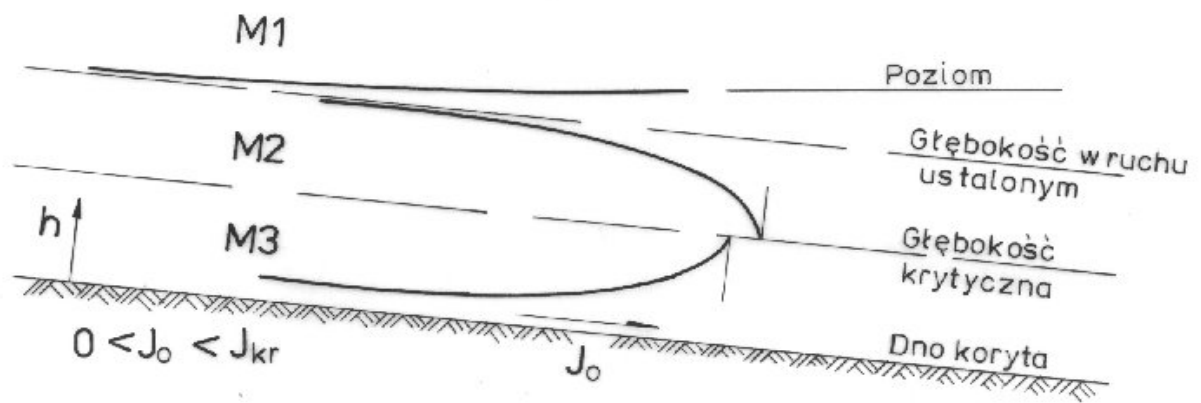
Type	Symbol	Definition	Sketches	Examples
<b>STEEP</b> (normal flow is supercritical)	S1	$h > h_c > h_n$		Hydraulic jump upstream with obstruction or reservoir controlling water level downstream.
	S2	$h_c > h > h_n$		Change to steeper slope.
	S3	$h_c > h_n > h$		Change to less steep slope.
<b>CRITICAL</b> (undesirable; undular unsteady flow)	C1	$h > h_c = h_n$		
	C3	$h_c = h_n > h$		
<b>MILD</b> (normal flow is subcritical)	M1	$h > h_n > h_c$		Obstruction or reservoir controlling water level downstream.
	M2	$h_n > h > h_c$		Approach to free overfall.
	M3	$h_n > h_c > h$		Hydraulic jump downstream; change from steep to mild slope or downstream of sluice gate.
<b>HORIZONTAL</b> (limiting mild slope; $h_n \rightarrow \infty$ )	H2	$h > h_c$		Approach to free overfall.
	H3	$h_c > h$		Hydraulic jump downstream; change from steep to horizontal or downstream of sluice gate.
<b>ADVERSE</b> (upslope)	A2	$h > h_c$		
	A3	$h_c > h$		

Klasyfikacja układu zwierciadła wody - (**GVE**)

Tab.1

$i_0 < i_{kr}$							
STREFA	$h$	$J_e$	$F_r$	L	M	$dh/ds$	KRZYWA
1	$h > H_0$	$J_e < i_0$	$F_r < 1$	+	+	+	<b>M1</b>
2	$h_{kr} < h < H_0$	$J_e > i_0$	$F_r < 1$	-	+	-	<b>M2</b>
3	$h < h_{kr}$	$J_e > i_0$	$F_r > 1$	-	-	+	<b>M3</b>

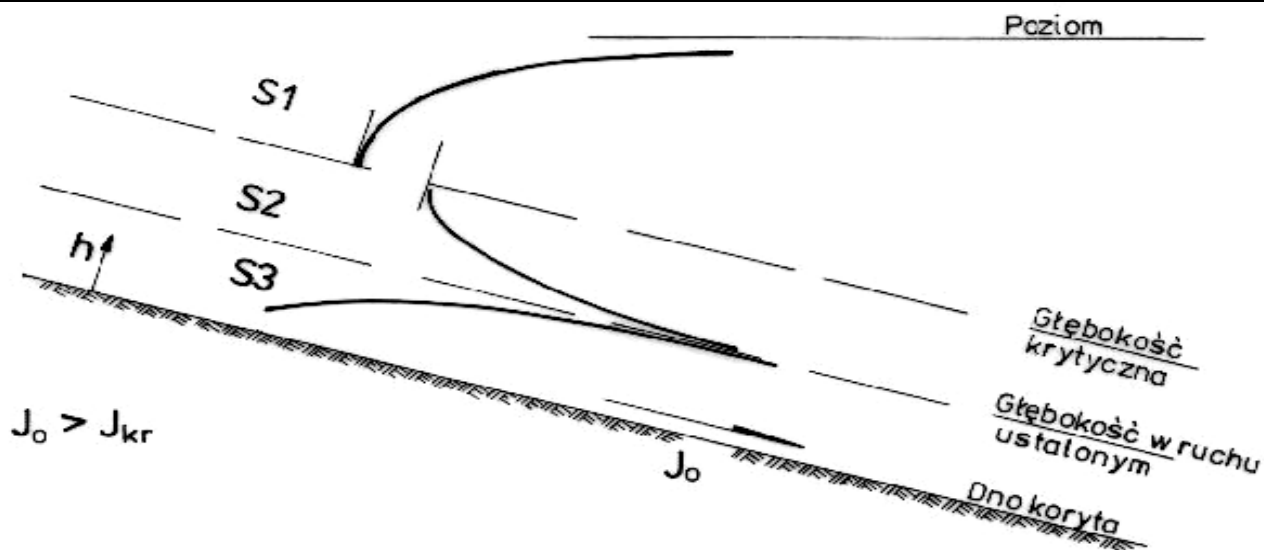
$H_0$  - głębokość normalna;  $h_{kr}, i_{kr}$  - głębokość i spadek krytyczny



- **M1** Krzywa spiętrzenia (krzywa cofkowa) zwrócona wypukłością ku dołowi mająca asymptoty: linię poziomą przy  $h \rightarrow \infty$  i linię zwierciadła wody w ruchu ustalonym przy  $h \rightarrow H_0$  (głębokość normalna).
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 < i_{kr}$
  2. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  maleje od  $H_p$  (wysokość piętrzenia) do  $1,01 \cdot H_0$  (głębokość normalna + 1%).
  
- **M2** Krzywa depresji zwrócona wypukłością ku górze mająca asymptoty: linia zwierciadła wody w ruchu ustalonym przy  $h \rightarrow H_0$  i linia prostopadła do linii głębokości krytycznej.
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 < i_{kr}$
  2. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  rośnie od  $h_{kr}$  (głębokość krytyczna) do  $0,99 \cdot H_0$  (głębokość normalna - 1%).
  - 3.
  
- **M3** Krzywa spiętrzenia zwrócona wypukłością ku dołowi zbliżająca się asymptotycznie do prostej prostopadłej do linii głębokości krytycznej przy  $h \rightarrow h_{kr}$ . Krzywa ta kończy się odskokiem hydraulicznym a rozpoczyna się od pewnego wymuszonego napełnienia koryta (np. wypływ spod zasuwy przy wysokości podniesienia  $a < h_{kr}$ ).
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 < i_{kr}$
  2. Przyjęcie drugiej głębokości sprzężonej równej głębokości normalnej  $h_{2s} = H_0$
  3. Obliczenie odskoku hydraulicznego
    - $h_{1s}$  - pierwsza głębokość sprzężona
    - $L_o$  - długość odskoku
  4. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  rośnie od  $h_0$  (głębokość za zasuwą) do  $h_{1s}$

Tab. 2

$i_0 > i_{kr}$							
STREFA	$H$	$J_e$	$F_r$	L	M	$dh/ds$	KRZYWA
1	$h > h_{kr}$	$J_e < J_0$	$F_r < 1$	+	+	+	S1
2	$H_0 < h < h_{kr}$	$J_e < J_0$	$F_r > 1$	+	-	-	S2
3	$h < H_0$	$J_e > J_0$	$F_r > 1$	-	-	+	S3



- **S1** Krzywa spiętrzenia zwrócona wypukłością ku górze mająca asymptotę poziomą przy  $h \rightarrow \infty$ , a przy  $h \rightarrow h_{kr}$  zbliżająca się asymptotycznie do linii pionowej. Taki układ zwierciadła wody występuje powyżej przeszkody w korycie, gdzie panuje ruch krytyczny lub nastąpiło już przejście z ruchu podkrytycznego w nadkrytyczny.
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 > i_{kr}$
  2. Przyjęcie pierwszej głębokości sprzężonej równej głębokości normalnej  $h_{1s} = H$
  3. Obliczenie odskoku hydraulicznego:  $h_{2s}$  - druga głębokość sprzężona,  $L$  - długość odskoku
  4. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  maleje od  $H_p$  (wysokość piętrzenia) do  $h_{2s}$  (druga głębokość sprzężona).
- **S2** Krzywa depresji zwrócona wypukłością ku dołowi i posiadająca asymptoty: linię pionową i linię zwierciadła wody w ruchu jednostajnym. Taki układ zwierciadła wody panuje przy wypływie spod zamknięcia przy wysokości podniesienia  $a > h_{kr}$  lub zmianie spadku koryta na spadek większy od krytycznego.
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 > i_{kr}$
  2. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  maleje od  $h_{kr}$  (gł. krytyczna) do  $1,01 \cdot H$  (głębokość normalna +

1%)

- **S3** Krzywa spiętrzenia zwrócona wypukłością ku górze rozpoczynająca się od wymuszonego napelnienia koryta (wypływ spod zasuwy przy wysokości podniesienia  $a < H < h_{kr}$ ) i zbliżająca się asymptotycznie do linii zwierciadła wody w ruchu jednostajnym.
  1. Sprawdzenie warunku  $i_0 > i_{kr}$
  2. Obliczenia krzywej: głębokość  $h$  rośnie od  $h_0$  (głębokość poniżej zasuwy) do  $0,99 \cdot H_0$  (głębokość normalna - 1%)

## 2. Obliczenie natężenia wypływu spod zasuwy $Q$ ([obliczenia](#))

Natężenie wypływu wody spod zasuwy, przy założeniu wypływu nie zatopionego, możemy obliczyć z następującej zależności:

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(H_p - h_0)}$$

gdzie:

$\mu$  - współczynnik wydatku,  $\mu = \varepsilon \varphi$

$\varepsilon$  - współczynnik dławienia,  $\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - \frac{a}{H_p}}$

$\varphi$  - współczynnik prędkości,

$a$  - wysokość podniesienia zasuwy,

$b$  - szerokość koryta w dnie,

$g$  - przyspieszenie ziemskie,

$H_p$  - wysokość piętrzenia,

$h_0$  - głębokość wody w przekroju zdławionym,  $h_0 = a\varepsilon$

## 3. Obliczenia długości odskoku $L_o$

Długość powstającego odskoku hydraulicznego można obliczyć z następujących zależności:

$$L_o = \left( 8 - 0,05 \frac{h_{2s}}{h_{1s}} \right) (h_{2s} - h_{1s})$$

lub

$$L_o = 6(h_{2s} - h_{1s})$$

$h_{1s}, h_{2s}$  - pierwsza i druga głębokość sprzężona,

#### 4. Metody obliczeń krzywych

Ogólne równanie ruchu wolnozmiennego dla kanału pryzmatycznego

$$\frac{dh}{ds} = i_0 \frac{1 - \frac{Q^2}{A^2 \cdot c^2 \cdot R_h \cdot i_0}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3}}$$

lub

$$\frac{dh}{ds} = i_0 \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{Z_{kr}}{Z}\right)^2}$$

gdzie:

$$K_n = \frac{Q}{\sqrt{i_0}}, \quad K = A c \sqrt{R_h}$$

$$Z_{kr} = Q \sqrt{\frac{\alpha}{g}}, \quad Z = A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Postać całkowa równania

$$\frac{i_0 \cdot s}{H} = (\eta_2 - \eta_1) - (1 - j) [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)]$$

gdzie:

$$\eta = \frac{h}{H}, \quad j = \frac{\alpha i_0 B K^2}{g A^3}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^x = \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2, \quad \varphi(n, x)$$

#### Przykład 1. Obliczenie krzywej spiętrzenia metodą graficzno-całkową

W kanale ziemnym o przekroju trapezowym spiętrzone wodę do wysokości  $H_p = 5,0$  m, powyżej dna kanału. Obliczyć krzywą spiętrzenia metodą graficzno-całkową do przekroju, gdzie głębokość jest o 1% większa od głębokości normalnej. W kanale o szerokości dna  $b = 10,0$  m i nachyleniu skarp 1:2 płynie  $Q = 60$  m<sup>3</sup>/s wody. Spadek dna kanału wynosi  $i_0 = 1,0$  ‰, współczynnik szorstkości  $n = 0,025$ , a współczynnik Saint Venanta  $\alpha = 1,0$ .

Rozwiązanie:

Dla wartości  $H = 2,312$  m wyznaczonej metodą kolejnych przybliżeń, obliczamy

$$A = (b + m h)h = (10,0 + 2 \cdot 2,312) \cdot 2,312 = 33,81 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2 h \sqrt{m^2 + 1} = 10,0 + 2 \cdot 2,312 \sqrt{2^2 + 1} = 20,34 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{\chi} = \frac{33,81}{20,34} = 1,66 \text{ m}$$

$$Q = A v = A \frac{1}{n} R_h^{2/3} i_0^{1/2} = 33,81 \cdot \frac{1}{0,025} \cdot 1,66^{2/3} \cdot 0,001^{1/2} = 60,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

Z równania ruchu krytycznego obliczamy

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1,0 \cdot 60^2}{9,81} = 367 \text{ m}^5$$

Drogą kolejnych przybliżeń wyznaczono  $h_{kr} = 1,397$  m, dla której

$$A_{kr} = (10,0 + 2 \cdot 1,397) \cdot 1,397 = 17,87 \text{ m}^2$$

$$B_{kr} = 10,0 + 2 \cdot 2 \cdot 1,397 = 15,59 \text{ m}$$

$$\frac{A_{kr}^3}{B_{kr}} = \frac{17,87^3}{15,59} = 366 \text{ m}^5$$

Obliczamy spadek krytyczny  $i_{kr}$

$$\text{Dla } h_{kr} = 1,397 \text{ m} \quad R_h = 1,10 \text{ m} \quad \chi = 16,25 \text{ m} \quad B = 15,59 \text{ m}$$

$$c = \frac{1}{n} R_h^{1/6} = \frac{1}{0,025} \cdot 1,10^{1/6} = 40,64$$

$$i_{kr} = \frac{g\chi}{B\alpha c^2} = \frac{9,81 \cdot 16,25}{15,59 \cdot 1,0 \cdot 40,64^2} = 0,0062 > 0,001$$

W przypadku spiętrzenia wody, gdy spadek dna jest mniejszy od spadku krytycznego, napętnienie koryta na odcinku cofki zmienia się w granicach od głębokości normalnej do wysokości piętrzenia czyli  $H < h_i \leq h_s$ , praktycznie  $1,01H \leq h_i \leq h_s$ . Obliczenia odległości między kolejnymi zakładanymi głębokościami  $h_i$  i  $h_{i+1}$  dokonujemy ze wzoru

$$\Delta s = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ds}{dh} \right)_i + \left( \frac{ds}{dh} \right)_{i+1} \right] (h_i - h_{i+1})$$

gdzie:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i_0} \frac{1 - \left( \frac{Z_{kr}}{Z} \right)^2}{1 - \left( \frac{K_n}{K} \right)^2}$$



$$K_n = \frac{Q}{\sqrt{i_0}} = \frac{60}{\sqrt{0,001}} = 1897,7 \quad K = Ac \sqrt{R_h}$$

$$Z_{kr} = Q \sqrt{\frac{\alpha}{g}} = 60 \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 19,15 \quad Z = A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Wyliczenie wielkości (a), (b) i (c)

$h_i$	$A$	$\chi$	$R_h$	$B$	$K$	$Z$	$(K_n/K)^2$	$(Z_{kr}/Z)^2$	$ds/dh$
5,0	100,0	32,36	3,09	30,0	8486	182,5	0,49	0,011	1041
4,5	85,5	30,12	2,84	28,0	6855	149,4	0,076	0,016	1065
4,0	72,0	27,89	2,58	26,0	5419	119,8	0,122	0,026	1110
3,5	59,5	25,65	2,32	24,0	4170	93,7	0,260	0,042	1208
3,0	48,0	23,42	2,05	22,0	3098	70,9	0,375	0,073	1483
2,5	37,5	21,18	1,77	20,0	2195	51,3	0,747	0,139	3402
2,4	35,5	20,73	1,71	19,6	2034	47,8	0,869	0,160	6455
2,33	34,16	20,42	1,67	19,3	1925	45,41	0,971	0,178	28509

Wyniki obliczeń układu zwierciadła wody

$h_i$ [m]	5,00	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,4	2,33
$\Delta s$ [m]		527	544	581	673	1221	493	1224
$S$ [m]	0,00	527	1071	1651	2324	3545	4038	5262

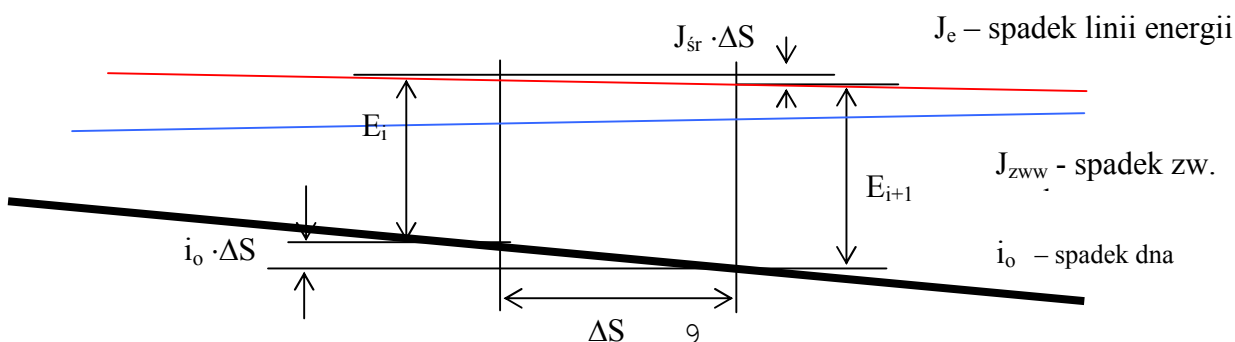
## Przykład 2. Obliczenia krzywej spiętrzenia metodą Czarnomskiego

Dla danych z przykładu 1 obliczyć układ zwierciadła wody w ruchu wolnozmiennym powyżej piętrzenia metodą Czarnomskiego.

Rozwiązanie:

Z rozwiązania przykładu 1 znamy głębokość normalną  $H = 2,31$  m, głębokość krytyczną  $h_{kr} = 1,397$  m oraz spadek krytyczny  $i_{kr} = 6,2$  ‰. Napełnienie koryta na odcinku cofki będzie zmieniało się od głębokości normalnej do wysokości piętrzenia  $h_s$ . W metodzie Czarnomskiego obliczamy odległości  $\Delta s$  pomiędzy poszczególnymi przekrojami o przyjętych napełnieniach  $h_i$  ze wzoru

$$\Delta S = \frac{E_{i+1} - E_i}{i_0 - J_{sr}}$$



$$\text{gdzie: } J_i = \left( \frac{v n}{R_h^{2/3}} \right)^2 \quad J_{sr} = \frac{J_i + J_{i+1}}{2}$$

$$B = b + 2m \cdot h_i, \quad A = (b + m \cdot h_i) \cdot h_i, \quad \chi = b + 2h_i \sqrt{1 + m^2}, \quad R_h = \frac{A}{\chi}$$

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}, \quad v = \frac{Q}{A}, \quad E = h_i + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

Przebieg obliczeń

$h_i$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$X$ [m]	$R_h$ [m]	$C$ [m <sup>2/3</sup> /s ]	$v$ [m/s]	$E$ [m]	$J_i \cdot 10^{-4}$ [-]	$J_{sr} \cdot 10^{-4}$ [-]	$\Delta s$ [m]	$S$ [m]
5,0	100,0	32,36	3,09	48,27	0,6	5,018	0,5	0,6	527	0
4,5	85,5	30,12	2,84	47,59	0,701	4,525	0,7	1,0	543	527
4,0	72,0	27,89	2,58	46,85	0,83	4,035	1,2	1,6	578	1070
3,5	59,5	25,65	2,32	46,02	1,01	3,551	2,1	2,9	666	1649
3,0	48,0	23,42	2,05	45,08	1,25	3,079	3,8	5,6	1023	2315
2,5	37,5	21,18	1,77	43,99	1,60	2,630	7,5	8,1	444	3338
2,4	35,5	20,73	1,71	43,75	1,69	2,545	8,7	9,2	732	3782
2,33	34,16	20,42	1,67	43,58	1,756	2,487	9,7			4512

### Przykład 3. Obliczenia krzywej spiętrzenia metodą Bakhmeteffa

Dla danych z przykładu 1 obliczyć układ zwierciadła wody w ruchu wolnozmiennym powyżej piętrzenia metodą Bakhmeteffa.

Rozwiązanie:

Z rozwiązania przykładu 1 znamy głębokość normalną  $H = 2,31$  m, głębokość krytyczną  $h_{kr} = 1,397$  m oraz spadek krytyczny  $i_{kr} = 6,2$  ‰. Napelnienie koryta na odcinku cofki będzie zmieniało się od głębokości normalnej do wysokości piętrzenia  $h_s$ . W metodzie Bakhmeteffa obliczamy odległości  $s$  pomiędzy przekrojem o przyjętym napelnieniu  $h_i$  a przekrojem, w którym piętrzymy wodę  $h_s$ .

Założenia wyjściowe:

$$\left( \frac{K_1}{K_2} \right)^2 = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^x$$

Przyjęto:  $K_1$  dla  $h_{sr} = \frac{hs + H}{2}$  oraz  $K_2$  dla  $h_s$

Obliczenia wykładnika potęgowego  $x$

$$h_{sr} = \frac{h_s + H}{2} = \frac{5 + 2,312}{2} = 3,656 \text{ m}, \quad A_{sr} = (10 + 2 \cdot 3,656) \cdot 3,656 = 63,29 \text{ m}^2$$

$$\chi_{sr} = 10 + 2 \cdot 3,656 \sqrt{1 + 2^2} = 26,35 \text{ m}, \quad R_{hsr} = \frac{63,29}{26,35} = 2,40 \text{ m}$$

$$B_{sr} = 10 + 2 \cdot 2 \cdot 3,656 = 24,62 \text{ m}, \quad c_{sr} = \frac{1}{n} R_{hsr}^{1/6} = \frac{1}{0,025} 2,40^{1/6} = 46,29$$

$$\text{Dla } h_{sr} = 3,656 \text{ m}, \quad j_1 = \frac{i_0 \alpha c_{sr}^2 B_{sr}}{g \chi_{sr}} = \frac{0,001 \cdot 1,0 \cdot 46,29^2 \cdot 24,62}{9,81 \cdot 26,35} = 0,2041$$

$$\text{Dla } H = 2,312 \text{ m}, \quad j_2 = \frac{i_0 \alpha c^2 B}{g \chi} = \frac{0,001 \cdot 1,0 \cdot 43,53^2 \cdot 19,25}{9,81 \cdot 20,34} = 0,1828$$

$$\bar{j} = \frac{j_1 + j_2}{2} = \frac{0,2041 + 0,1828}{2} = 0,1935$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i_0}} = \frac{60}{\sqrt{0,001}} = 1897, \quad K_{sr} = \frac{1}{n} A_{sr} R_{hsr}^{2/3} = \frac{1}{0,025} 63,29 \cdot 2,40^{2/3} = 4538$$

$$x = 2 \cdot \frac{\log K_{sr} - \log K_0}{\log h_{sr} - \log H} = 2 \cdot \frac{\log 4538 - \log 1897}{\log 3,656 - \log 2,312} = 3,81 \text{ przyjąć } x = 3,8$$

Odległość  $S$  liczymy z wzoru

$$S = \frac{H}{i_0} \left[ \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j}) (\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)) \right]$$

gdzie  $\eta = \frac{h}{H}$   $\varphi(\eta)$  - wartość funkcji odczytywana z tabeli ([skrypt](#)) dla wykładnika potęgowego  $x = 3,8$ .

Przyjmując, że  $\eta_2 = \frac{h_s}{H} = \frac{5,0}{2,312} = 2,162$  stąd  $\varphi(\eta_2) = \varphi(2,162) = 0,043$  oraz  $\eta_1 = \eta_i = \frac{h_i}{H}$

Wyniki obliczeń

$h_i$	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,40	2,33
$\eta$	2,162	1,946	1,730	1,514	1,298	1,081	1,038	1,008
$\varphi(\eta)$	0,043	0,055	0,083	0,121	0,207	0,485	0,689	1,098
$S$ [m]	0	522	1074	1645	2306	3324	3804	4636

#### Przykład 4. Obliczenie układu zwierciadła wody przy zmianie spadku dna (bystrze) metodą Bakhmeteffa

W kanale o spadku dna  $i_1 = 1,5 \text{ ‰}$  i napelnieniu  $H_1 = 1,335 \text{ m}$ , zmieniono gwałtownie spadek na dziesięciokrotnie większy  $i_2 = 15 \text{ ‰}$ . Szerokość dna kanału  $b = 1 \text{ m}$ , nachylenie skarp  $m = 2$  oraz współczynnik szorstkości  $n = 0,025$ . Obliczyć: a) natężenie przepływu  $Q$  w kanale, b) napelnienie koryta w

ruchu jednostajnym na odcinku o spadku  $i_2$ , c) odległości, w górę i dół od miejsca zmiany spadku, w jakiej napelnienie kanału jest praktycznie równe głębokości normalnej.

Rozwiązanie:

Obliczamy natężenie przepływu  $Q$  przy napelnieniu  $h = H_1$

$$A = (b + m h) h = (1,0 + 2 \cdot 1,335) 1,335 = 4,899 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2 h \sqrt{m^2 + 1} = 1,0 + 2 \cdot 1,335 \sqrt{2^2 + 1} = 6,970 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{\chi} = \frac{4,899}{6,970} = 0,703 \text{ m}$$

$$Q = A v = A \frac{1}{n} R_h^{2/3} i_0^{1/2} = 4,899 \cdot \frac{1}{0,025} \cdot 0,703^{2/3} \cdot 0,0015^{1/2} = 6,00 \text{ m}^3/\text{s}$$

Obliczamy głębokość krytyczną  $h_{kr}$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1,0 \cdot 6^2}{9,81} = 3,67 \text{ m}^5$$

Drogą kolejnych przybliżeń przyjęto  $h_{kr} = 0,912 \text{ m}$ , dla której:

$$A_{kr} = (1,0 + 2 \cdot 0,912) \cdot 0,912 = 2,575 \text{ m}^2$$

$$B_{kr} = 1,0 + 2 \cdot 2 \cdot 0,912 = 4,468 \text{ m}$$

$$\frac{A_{kr}^3}{B_{kr}} = \frac{2,575^3}{4,468} = 3,673 \text{ m}^5$$

Obliczamy spadek krytyczny  $i_{kr}$

$$\text{Dla } h_{kr} = 0,912 \text{ m, } \chi_{kr} = 1 + 2 \cdot 0,912 \sqrt{2^2 + 1} = 5,079 \text{ m}$$

$$R_{hkr} = \frac{2,575}{5,079} = 0,507 \text{ m, } c_{kr} = \frac{1}{n} R_h^{1/6} = \frac{1}{0,025} 0,509^{1/6} = 43,53$$

$$i_{kr} = \frac{g \chi_{kr}}{B_{kr} \alpha c_{kr}^2} = \frac{9,81 \cdot 5,079}{4,468 \cdot 1,0 \cdot 35,719^2} = 0,00084$$

Ponieważ spadek dna  $i_1 = 1,5 \text{ ‰}$  jest mniejszy od spadku krytycznego  $i_{kr} = 8,4 \text{ ‰}$ , napelnienie koryta na tym odcinku będzie zmieniało się od głębokości normalnej do głębokości krytycznej  $h_{kr}$ , czyli  $h_{kr} < h_i < H_1$

$$h_{\acute{s}r} = \frac{h_{kr} + H_1}{2} = \frac{0,912 + 1,335}{2} = 1,124 \text{ m, } A_{\acute{s}r} = (1,0 + 2 \cdot 1,124) \cdot 1,124 = 3,651 \text{ m}^2$$

$$\chi_{\acute{s}r} = 1,0 + 2 \cdot 1,124 \sqrt{1+2^2} = 6,027 \text{ m, } R_{hsr} = \frac{3,651}{6,027} = 0,606 \text{ m}$$

$$B_{\acute{s}r} = 1,0 + 2 \cdot 2 \cdot 1,124 = 5,496 \text{ m, } c_{\acute{s}r} = \frac{1}{n} R_{hsr}^{1/6} = \frac{1}{0,025} 0,606^{1/6} = 36,80$$

$$\text{Dla } h_{sr} = 1,124 \text{ m, } j_1 = \frac{i_0 \alpha c_{sr}^2 B_{sr}}{g \chi_{sr}} = \frac{0,0015 \cdot 1,0 \cdot 36,80^2 \cdot 5,496}{9,81 \cdot 6,027} = 0,1888$$

$$\text{Dla } H = 1,335 \text{ m, } j_2 = \frac{i_0 \alpha c^2 B}{g \chi} = \frac{0,0015 \cdot 1,0 \cdot 37,72^2 \cdot 6,34}{9,81 \cdot 6,976} = 0,1979$$

$$\bar{j} = \frac{j_1 + j_2}{2} = \frac{0,1888 + 0,1979}{2} = 0,1934$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i_0}} = \frac{6,0}{\sqrt{0,0015}} = 154,92, \quad K_{sr} = \frac{1}{n} A_{sr} R_{hsr}^{2/3} = \frac{1}{0,025} 3,651 \cdot 0,606^{2/3} = 104,58$$

$$x = 2 \cdot \frac{\log K_{sr} - \log K_0}{\log h_{sr} - \log H} = 2 \cdot \frac{\log 104,58 - \log 154,92}{\log 1,124 - \log 1,335} = 4,57 \Rightarrow x = 4,6$$

$$\eta_1 = \frac{h_i}{H_1} = \frac{1,33}{1,335} = 0,996 \quad \eta_2 = \frac{h_{kr}}{H_1} = \frac{0,912}{1,335} = 0,683$$

$$\text{Dla } x = 4,6; \quad \varphi(0,996) = 1,751 \quad \varphi(0,683) = 0,703$$

$$S = \frac{H_1}{i_0} \left[ \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j}) (\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)) \right] =$$

$$= \frac{1,335}{0,0015} [0,683 - 0,996 - (1 - 0,1934)(0,703 - 1,751)] = 473,8 \text{ m}$$

Na odcinku o spadku  $i_2 = 15 \text{ ‰}$  dla założonej wartości  $H_2 = 0,799 \text{ m}$  obliczamy

$$A = (b + m h) h = (1,0 + 2 \cdot 0,799) \cdot 0,799 = 2,076 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2 h \sqrt{m^2 + 1} = 1,0 + 2 \cdot 0,799 \sqrt{2^2 + 1} = 4,573 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{\chi} = \frac{2,076}{4,573} = 0,454 \text{ m}$$

$$Q = A v = A \frac{1}{n} R_h^{2/3} i_0^{1/2} = 2,076 \cdot \frac{1}{0,025} \cdot 0,454^{2/3} \cdot 0,015^{1/2} = 6,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ponieważ spadek dna po zmianie wynosi  $i_2 = 15 \text{ ‰}$  i jest większy od spadku krytycznego  $i_{kr} = 8,4 \text{ ‰}$  napelnienie koryta na tym odcinku będzie zmieniało się od głębokości krytycznej do głębokości normalnej,  $H_2 < h_i < h_{kr}$ .

$$h_{sr} = \frac{h_{kr} + H_2}{2} = \frac{0,912 + 0,799}{2} = 0,856 \text{ m, } A_{sr} = (1,0 + 2 \cdot 0,799) \cdot 0,799 = 2,231 \text{ m}^2$$

$$\chi_{sr} = 1,0 + 2 \cdot 0,799 \sqrt{1+2^2} = 4,828 \text{ m, } R_{hsr} = \frac{2,231}{4,828} = 0,481 \text{ m}$$

$$B_{sr} = 1,0 + 2 \cdot 2 \cdot 0,799 = 4,424 \text{ m, } c_{sr} = \frac{1}{n} R_{hsr}^{1/6} = \frac{1}{0,025} 0,481^{1/6} = 35,41$$

$$\text{Dla } h_{sr} = 0,856 \quad j_1 = \frac{i_0 \alpha c_{sr}^2 B_{sr}}{g \chi_{sr}} = \frac{0,015 \cdot 1,0 \cdot 35,41^2 \cdot 4,424}{9,81 \cdot 4,828} = 1,757$$

$$\text{Dla } H_2 = 0,799 \text{ m} \quad j_2 = \frac{i_0 \alpha c^2 B}{g \chi} = \frac{0,015 \cdot 1,0 \cdot 35,07^2 \cdot 1,0}{9,81 \cdot 4,573} = 1,726$$

$$\bar{j} = \frac{j_1 + j_2}{2} = \frac{1,726 + 1,757}{2} = 1,7415$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i_0}} = \frac{6,0}{\sqrt{0,015}} = 48,99; \quad K_{sr} = \frac{1}{n} A_{sr} R_{hsr}^{2/3} = \frac{1}{0,025} 2,321 \cdot 0,481^{2/3} = 56,99$$

$$x = 2 \cdot \frac{\log K_{sr} - \log K_0}{\log h_{sr} - \log H} = 2 \cdot \frac{\log 56,99 - \log 48,99}{\log 0,856 - \log 0,799} = 4,39 \Rightarrow x = 4,4$$

$$\eta_2 = \frac{h_1}{H_2} = \frac{0,80}{0,799} = 1,001 \quad \eta_1 = \frac{h_{kr}}{H_2} = \frac{0,912}{0,799} = 1,14$$

$$\text{Dla } x = 4,4 \quad \varphi(1,001) = 1,344 \quad \varphi(1,14) = 0,267$$

$$S = \frac{0,799}{0,015} [1,001 - 1,14 - (1 - 1,7415)(1,344 - 0,267)] = 35,1 \text{ m}$$

### Przykład 5. Obliczenie układu zwierciadła wody poniżej zasuwy metodą Bakhmeteffa

Na kanale melioracyjnym o prostokątnym przekroju i szerokości w dnie  $b = 1 \text{ m}$ , wykonano przepust z zasuwą o świetle równym szerokości, piętrzącą wodę do wysokości  $h_s = 2 \text{ m}$ . Obliczyć metodą Bakhmeteffa na jaką odległość poniżej zasuwy odczuwalny jest jej wpływ, jeżeli wysokość jej otwarcia powyżej dna  $a = 0,35 \text{ m}$ , współczynnik prędkości  $\varphi = 0,95$  a spadek dna wynosi  $i_0 = 8,0\%$ . Współczynnik szorstkości dna przyjmując  $0,02$ .

Rozwiązanie:

Obliczamy natężenie przepływu, przy założeniu niezatopionego wypływu spod zasuwy z wzoru:

$$Q = \mu ab \cdot \sqrt{2g(h_s - h_0)}$$

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - \frac{a}{h_s}} = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - \frac{0,35}{2,0}} = 0,616$$

$$h_0 = \varepsilon a = 0,616 \cdot 0,35 = 0,216 \text{ m}; \quad \mu = \varphi = 0,616 \cdot 0,95 = 0,585$$

$$Q = 0,585 \cdot 0,35 \cdot 1,0 \sqrt{2 \cdot 9,81 (2,0 - 0,216)} = 1,21 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dla wartości  $H = 0,63 \text{ m}$  wyznaczonej metodą kolejnych przybliżeń, obliczamy

$$A = b h = 1,0 \cdot 0,63 = 0,63 \text{ m}^2, \quad \chi = b + 2 h = 1,0 + 2 \cdot 0,63 = 2,26 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{\chi} = \frac{0,63}{2,26} = 0,279 \text{ m}$$

$$Q = A v = A \frac{1}{n} R_h^{2/3} i_0^{1/2} = 0,63 \cdot \frac{1}{0,02} \cdot 0,279^{2/3} \cdot 0,008^{1/2} = 1,203 \text{ m/s}$$

Z równania ruchu krytycznego obliczamy

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1,0 \cdot 1,21^2}{9,81} = 0,149 \text{ m}^5$$

Drogą kolejnych przybliżeń przyjęto  $h_{kr} = 0,53 \text{ m}$ , dla której

$$A_{kr} = 1,0 \cdot 0,53 = 0,53 \text{ m}^2; \quad B = b = 1,0 \text{ m}$$

$$\frac{A_{kr}^3}{B_{kr}} = \frac{0,53^3}{1,0} = 0,149 \text{ m}^5$$

Obliczamy spadek krytyczny  $i_{kr}$

$$\text{Dla } h_{kr} = 0,53 \text{ m}; \quad R_h = 0,257; \quad \chi = 2,06 \text{ m}; \quad B = 1,0 \text{ m}$$

$$c = \frac{1}{n} R_h^{1/6} = \frac{1}{0,02} 0,257^{1/6} = 39,87$$

$$i_{kr} = \frac{g\chi}{B\alpha c^2} = \frac{9,81 \cdot 2,06}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 39,87^2} = 0,0127 > 0,008$$

W przypadku wypływu spod zasuwy, kiedy jej otwarcie  $a$  jest mniejsze od głębokości krytycznej  $h_{kr}$  oraz gdy spadek dna jest mniejszy od spadku krytycznego, napełnienie koryta zmienia się w granicach od głębokości zdławionej poniżej zasuwy do pierwszej głębokości sprzężonej czyli  $h_0 < h_i \leq h_{1s}$ .

Obliczamy parametry odskoku hydraulicznego powstającego poniżej zasuwy przy założeniu, że druga głębokość sprzężona równa jest głębokości normalnej.

$$\text{Dla } h_{2s} = H = 0,63 \text{ m}; \quad v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{1,21}{0,63} = 1,921 \text{ m/s}$$

$$F_{r2} = \frac{v_2}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} g h_{2s}}} = \frac{1,921}{\sqrt{\frac{1}{1,0} \cdot 9,81 \cdot 0,63}} = 0,773$$

$$h_{1s} = \frac{h_{2s}}{2} (\sqrt{8 F_{r2}^2 + 1} - 1) = \frac{0,63}{2} (\sqrt{8 \cdot 0,773^2 + 1} - 1) = 0,442 \text{ m}$$

Obliczamy odległość pomiędzy  $h_0$  i  $h_{1s}$

$$h_{sr} = \frac{h_0 + h_{1s}}{2} = \frac{0,216 + 0,442}{2} = 0,329 \text{ m}; \quad A_{sr} = 1,0 \cdot 0,329 = 0,329 \text{ m}^2$$

$$\chi_{sr} = 1,0 + 2 \cdot 0,329 = 1,658 \text{ m}; \quad R_{hsr} = \frac{0,329}{1,658} = 0,198 \text{ m}$$

$$B_{sr} = b = 1,0 \text{ m}; \quad c_{sr} = \frac{1}{n} R_{hsr}^{1/6} = \frac{1}{0,02} 0,198^{1/6} = 38,17$$

$$\text{Dla } h_{sr} = 0,329 \text{ m; } j_1 = \frac{i_0 \alpha c_{sr}^2 B_{sr}}{g \chi_{sr}} = \frac{0,008 \cdot 1,0 \cdot 38,17^2 \cdot 1,0}{9,81 \cdot 1,658} = 0,7166$$

$$\text{Dla } H = 0,63 \text{ m; } j_2 = \frac{i_0 \alpha c^2 B}{g \chi} = \frac{0,008 \cdot 1,0 \cdot 40,42^2 \cdot 1,0}{9,81 \cdot 2,26} = 0,5895$$

$$\bar{j} = \frac{j_1 + j_2}{2} = \frac{0,7166 + 0,5895}{2} = 0,6532$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i_0}} = \frac{1,21}{\sqrt{0,008}} = 13,528; \quad K_{sr} = \frac{1}{n} A_{sr} R_{hsr}^{2/3} = \frac{1}{0,02} \cdot 0,329 \cdot 0,198^{2/3} = 5,588$$

$$x = 2 \cdot \frac{\log K_{sr} - \log K_0}{\log h_{sr} - \log H} = 2 \cdot \frac{\log 5,588 - \log 13,528}{\log 0,329 - \log 0,63} = 2,72 \Rightarrow x = 2,7$$

$$\eta_2 = \frac{h_{1s}}{H} = \frac{0,442}{0,63} = 0,702; \quad \eta_1 = \frac{h_0}{H} = \frac{0,216}{0,63} = 0,343$$

$$\text{Dla } x = 2,7; \quad \varphi(0,702) = 0,795; \quad \varphi(0,343) = 0,372$$

$$S = \frac{0,63}{0,008} [0,702 - 0,343 - (1 - 0,6532)(0,795 - 0,372)] = 16,72 \text{ m}$$

Obliczamy długość odskoku hydraulicznego:

$$L = 5(h_2 - h_1) = 5(0,63 - 0,44) = 0,95 \text{ m}$$

**Odpowiedź:  $S+L = 17,67 \text{ m}$**

### Przyjęte oznaczenia

$A$  - pole przekroju czynnego [ $\text{m}^2$ ]

$B$  - szerokość koryta w poziomie zwierciadła wody [m]

$b$  - szerokość koryta w dnie [m]

$c$  - współczynnik prędkości we wzorze Chezy [ $\text{m}^{1/2} \text{s}^{-1}$ ]

$E$  - energia rozporządzalna [m]

$F_r$  - liczba Froude'a  $F_r = \frac{v}{\sqrt{g h}}$  [-]

$g$  - przyspieszenie ziemskie [ $\text{m s}^{-2}$ ]

$H$  - głębokość normalna [m]

$h$  - głębokość napełnienia koryta [m]

$i_0$  - spadek dna koryta [-]

$I$  - spadek linii energii [-]

$n$  - współczynnik szorstkości [ $\text{m}^{-1/3} \text{s}$ ]

$Q$  - natężenie przepływu [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]

$R_h$  - promień hydrauliczny [m]

$s$  - długość koryta [m]

$\alpha$  - współczynnik Saint-Venanta [-]

$\chi$  - obwód zwilżony [m]



## Literatura

1. Lewandowski J.B.: Mechanika płynów. Wydawnictwo Akademii Rolniczej im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu, Poznań 2006
2. Lewandowski J.B., Jesse I., Kałuża T., Makowska M. Zawadzki P.: Hydraulika. Przewodnik do ćwiczeń. Wydawnictwo Akademii Rolniczej im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu, Poznań 2004
3. White F. M.: Fluid Mechanics., McGraw-Hill (Chapter 10 Open-Channel Flow)  
[http://dl1.ponato.com/eb1/447\\_\\_7cc214a.pdf](http://dl1.ponato.com/eb1/447__7cc214a.pdf)
4. Zawadzki P.: Obliczenia wypływu spod zasuwy. [www.up.poznan.pl/kiwis/dydaktyka/mp/zasuwa.pps](http://www.up.poznan.pl/kiwis/dydaktyka/mp/zasuwa.pps)

### **Gradually-Varied Flow in Open Channels:**

<http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/david.d.apsley/lectures/hydraulics3/gvf.pdf>

[http://web.itu.edu.tr/~bulu/hydraulics\\_files/lecture\\_notes\\_06.pdf](http://web.itu.edu.tr/~bulu/hydraulics_files/lecture_notes_06.pdf)

[http://ponce.sdsu.edu/gvfprofiles\\_criticalslope.html](http://ponce.sdsu.edu/gvfprofiles_criticalslope.html)

<http://www.lmnoeng.com/Channels/gvf.htm>

[http://www.lth.se/fileadmin/tvrl/files/vvr090/lecture13\\_gradually\\_varied\\_flow1\\_2.pdf](http://www.lth.se/fileadmin/tvrl/files/vvr090/lecture13_gradually_varied_flow1_2.pdf)

### **Classification of Gradually Varied Flow Profiles**

[http://www.nptel.ac.in/courses/105106114/pdfs/Unit23/23\\_3.pdf](http://www.nptel.ac.in/courses/105106114/pdfs/Unit23/23_3.pdf)