

MATEMATYKA

Skrypt dla studentów kierunków przyrodniczych

Małgorzata Graczyk

Poznań, 2015

Wydawnictwo Rafał Zieliński

Recenzent: prof. dr hab. Bronisław Ceranka

Małgorzata Graczyk ©
ISBN 978-83-940663-0-7

Wydawnictwo
Rafał Zieliński
ul. Lukrecjowa 14/2

Spis treści

Od autora	5
Ciągi, szeregi	7
Funkcja jednej zmiennej i jej własności	25
Granica funkcji, asymptoty, ciągłość	45
Pochodna funkcji	59
Pochodna funkcji: zastosowania	73
Reguła de l'Hospitala	95
Całki nieoznaczone	119
Całki z funkcji wymiernych	131
Całki oznaczone	145
Podstawowe równania różniczkowe	167
Przykładowe zestawy na kolokwia	183
Bibliografia	187

Od autora

W dzisiejszych czasach coraz więcej osób zaczyna dbać o dobrą kondycję i pracuje nad swoim ciałem. Ludzie kupują różnorakie sprzęty lub karnety na siłownię i w trudzie dążą do idealnego wyglądu. W tym całym zabieganiu zapominają o najważniejszym i najszlachetniejszym "mięśniu- o mózgu.

Oto masz przed sobą ciężarek o wadze 756KB, który choć nie aż tak wielki, często używany przyniesie zadowalające efekty. Nie zapominaj o regularnym powtarzaniu wszystkich ćwiczeń. Nie martw się, drogi Czytelniku, nie nabawisz się zakwasów od tego rodzaju wysiłku.

Zbiór zadań zawiera materiały pomocne w opanowaniu problematyki omawianej na ćwiczeniach z matematyki na poziomie podstawowym A1.

Zadania zostały przygotowane z myślą o studentach Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu. Z tego powodu zawarte zostały zadania pomagające w opanowaniu zagadnień omawianych na zajęciach, ale również przykładowe zestawy zadań, które pojawiają się na kolokwiach, co pozwala zapoznać się z rodzajami i stopniem trudności zadań.

Materiał zawarty w tej książce obejmuje zagadnienia analizy matematycznej: ciągi, szeregi, funkcję i jej własności,

pochodną funkcji i niektóre jej zastosowania. Kolejne tematy to całki nieoznaczone i oznaczone oraz ich zastosowanie. Ostatnim elementem są podstawowe typy równań różniczkowych.

Omówione zostały przykładowe zadania. Oprócz tego, każdy rozdział zawiera odpowiedzi do wszystkich zadań. Mam nadzieję, że dowcipy i powiedzonka o matematyce umilą rozwiązywanie zadań.

Uprzejmie proszę o przekazywanie uwag na adres:
points2015@gmail.com.

Życzę Państwu miłej lektury.

:)

Temu, kto nie zna matematyki, trudno spostrzec głębokie piękno przyrody.

R. Feynman

Rozdział 1: Ciągi, szeregi

Przykład 1. Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu o elementach

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -2, a_4 = 6, a_5 = -24, \\ a_6 = 120, \dots$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$a_1 = (-1)^1, a_2 = (-1)^2, a_3 = (-1)^3 \cdot 2, \\ a_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3, a_5 = (-1)^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \\ a_6 = (-1)^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots, \text{ czyli } a_n = (-1)^n \cdot (n-1)!$$

Zadanie 1. Naskicuj wykres ciągu i podaj wzór na jego wyraz ogólny, o ile to jest możliwe.

- a) ciągu liczb parzystych,
- b) ciągu odwrotności liczb nieparzystych,
- c) ciągu stałego o wyrazach równych -4,
- d) ciągu kwadratów kolejnych liczb naturalnych,
- e) ciągu o elementach 2, 9, 20, 35, ...,
- f) ciągu o wyrazach $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$,
- g) ciągu odwrotności kolejnych potęg trójki,
- h) ciągu kolejnych potęg liczby -1,
- i) ciągu o elementach 2, 5, 10, 17, 26, 37, ...,

- j) ciągu o elementach $3, -9, 27, -81, 243, \dots$,
- k) ciągu kolejnych liczb pierwszych,
- l) ciągu o elementach $-4, 5, 20, 35, \dots$,
- m) ciągu o elementach $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$,
- n) ciągu o elementach $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$,
- o) ciągu o elementach równych odwrotnościom kwadratów kolejnych liczb nieparzystych,
- p) ciągu pierwiastków z liczb naturalnych,
- r) ciągu o elementach, które są pierwiastkami równania
 $\sin x = 0$ w przedziale $[0, \infty)$,
- s) ciągu o elementach, które są pierwiastkami równania
 $\cos x = -1$ w przedziale $[0, \infty)$,
- t) ciągu odwrotności kolejnych potęg liczby 7,
- u) ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych.

Przykład 2. Oblicz sześć pierwszych wyrazów ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = -2^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Rozwiązanie:

Podstawiając za n kolejne liczby naturalne otrzymujemy:

$$a_1 = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2},$$

$$a_2 = -4 \sin \frac{\pi}{2} = -4 \cdot 1 = -4,$$

$$a_3 = -8 \sin \frac{3\pi}{4} = -8 \frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2},$$

$$a_4 = -16 \sin \pi = -16 \cdot 0 = 0,$$

$$a_5 = -32 \sin \frac{5\pi}{4} = -32 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\sqrt{2},$$

$$a_6 = -64 \sin \frac{6\pi}{4} = -64 \cdot (-1) = 64.$$

Zadanie 2. Wyznacz wyrazy od pierwszego do szóstego ciągów o podanych wyrazach ogólnych

a) $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}, b_n = \frac{1}{2^{n+1}},$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, b_n = \frac{(-1)^n}{2^n},$

c) $a_n = \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right), b_n = n - 1,$

d) $a_n = 2^{n-1} + 3, b_n = \frac{1}{2} (n^2 - n + 8),$

e) $a_n = 3^{n-1} + 1, b_n = \frac{1}{2} (n^2 + n + 2).$

Przykład 3. Podaj, które wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{8n+19}-\sqrt{n^2-1}}{\ln(n+1)}$ są nieujemne.

Rozwiązanie:

Wyrazy ciągu są nieujemne, gdy $a_n \geq 0$.

Stąd $\frac{\sqrt{8n+19}-\sqrt{n^2-1}}{\ln(n+1)} \geq 0$.

Dla $n \geq 1$ wyrażenie w mianowniku jest zawsze do-

datnie, zatem $\sqrt{8n+19} \geq \sqrt{n^2-1}$.

Podnosimy obustronnie do kwadratu i otrzymujemy $-n^2 + 8n + 20 \geq 0$. Ostatecznie, $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Zadanie 3. Podaj, które wyrazy ciągu o podanym wyrazie ogólnym mają określoną własność

- a) wyrazy są dodatnie, jeżeli $a_n = (-1)^n$,
- b) wyrazy są równe zero, jeżeli $a_n = \frac{n^2-4n+1}{2n^2+1}$,
- c) wyrazy są równe zero, jeżeli $a_n = n^2(n-3)$,
- d) wyrazy są nieujemne, jeżeli $a_n = 50 + 5n - n^2$,
- e) wyrazy są ujemne, jeżeli $a_n = n^2 - 5n - 10$,
- f) wyrazy są ujemne, jeżeli $a_n = 3n^2 + 10n + 8$,
- g) wyrazy są równe zero, jeżeli $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+4}}{n^2+n+2}$,
- h) wyrazy są równe zero, jeżeli $a_n = \frac{n^2-n-2}{\sqrt{n^2+1}+1}$,
- i) wyrazy są niedodatnie, jeżeli $a_n = (-1)^n \ln n$,
- j) wyrazy są niedodatnie, jeżeli $a_n = \frac{\sqrt{n+4}-n}{n^2+1}$.

Monotoniczność ciągu

Ciąg jest rosnący, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_{n+1} - a_n > 0$.

Przykład 4. Dla jakiego parametru p ciąg $\{a_n\}$ wyrażenie ogólnym $a_n = \frac{2}{3} \ln(n+1) - 4$ jest rosnący?

Rozwiązanie:

Aby sprawdzić czy dany ciąg jest rosnący musimy obliczyć $a_{n+1} = \frac{2}{3} \ln(n+2) - 4$. Następnie $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3} \ln(n+2) - 4 - \frac{2}{3} \ln(n+1) + 4$.

Korzystając z własności logarytmów

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3} \ln \frac{n+2}{n+1} > 0.$$

Funkcja logarytmiczna przyjmuje wartości dodatnie, jeżeli liczba logarytmowana jest większa od jedynki, czyli $\frac{n+2}{n+1} > 1$. Nierówność ta jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i ciąg jest rosnący.

Zadanie 4. Dla jakiego parametru p ciągu (a_n) ma określoną własność

- a) jest rosnący, jeżeli $a_n = np + 1$,
- b) jest stały, jeżeli $a_n = n^2 p$,
- c) malejący, jeżeli $a_n = n^2 - np$,
- d) jest rosnący, jeżeli $a_n = \frac{pn}{n+1}$,

- e) jest arytmetyczny, jeżeli $a_n = 6n + p - 2$,
- f) jest arytmetyczny, jeżeli $a_n = \frac{2n-5+p}{3}$,
- g) arytmetyczny, jeżeli $a_n = \sqrt{2p}(n+1)$,
- h) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 24, a suma kwadratów tych liczb jest równa 210. Wyznacz ten ciąg.
- i) Dla jakiej wartości parametru p liczby $x^2 + 2x$, $x^2 + 2x - 1$, $5x + 8$ tworzą ciąg arytmetyczny?
- j) Liczby x , y , z tworzą ciąg geometryczny, zaś liczby $x-1$, $y+5$, $z+9$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeżeli $x + y + z = 21$.

Przykład 5. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{2n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}{7n}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}{7n}$$

Przekształcamy to wyrażenie korzystając z podstawowego wzoru algebry elementarnej $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$. Mnożąc licznik i mianownik ułamka przez wyrażenie, które znajduje się w liczniku ze znakiem "+ótrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 2n})(\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 2n})}{7n(\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 2n})} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n - (n^2 + 2n)}{7n(\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 2n})} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{7n(\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 2n})} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{7(\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 2n})}
\end{aligned}$$

Stopień wyrażenia w mianowniku jest równy 1, zatem licznik i mianownik dzielimy przez n pamiętając o tym, że, aby podzielić pierwiastek kwadratowy przez n , należy wyrażenie podpierwiastkowe podzielić przez n^2 .

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}}{\left(\sqrt{2\frac{n^2}{n^2} + 5\frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + 2\frac{n}{n^2}}\right)} = \\
& \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, więc otrzymujemy ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 2n}}{7n} = \frac{1}{7(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{7}.$$

Zadanie 5. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n,$$

$$b) \quad a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}},$$

$$c) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 3}, \quad d) \quad a_n = \frac{3n^3 + 7n^2 - 1}{n+2},$$

$$e) \quad a_n = \frac{(n-3)(1-n^2)}{2n(n-2)},$$

$$f) \quad a_n = \frac{2n^2 + 7}{\sqrt{3n^2 - 9}},$$

$$g) \quad a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}}{3n},$$

$$h) \quad a_n = \frac{3n^2 + 7}{4n^3 + 5n - 1},$$

$$i) \quad a_n = \frac{(2-n)(n^2+1)}{(7n+1)(n+2)},$$

$$j) \quad a_n = \frac{\sqrt{3n^2 + 4} - 1}{2n - 1},$$

$$k) \quad a_n = \sqrt{n + 2} - n,$$

$$l) \quad a_n = \frac{5n+1}{\sqrt{5n^2+2}},$$

$$m) \quad a_n = \sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad n) \quad a_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n^3+1}},$$

$$o) \quad a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{3n},$$

$$p) \quad a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n},$$

$$r) \quad a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{2n},$$

$$s) \quad a_n = \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{0,5n},$$

$$t) \quad a_n = \left(1 - \frac{11}{3n}\right)^{-7n},$$

$$u) \quad a_n = \left(\frac{1+3n}{3n+2}\right)^{n^2}.$$

Przykład 6. Wyznacz sumę szeregu $\frac{4}{7} + \frac{8}{21} + \frac{16}{63} + \dots$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że podany szereg jest to suma wyrazów, które tworzą ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym równym $a_1 = \frac{4}{7}$ oraz ilorazie $q = \frac{2}{3}$. Warunkiem

zbieżności takiego szeregu jest, aby $|q| < 1$. Tutaj $q = \frac{2}{3} < 1$, więc możemy zastosować wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$. Czyli $S = \frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{12}{7}$.

Zadanie 6. Zbadaj, czy szereg jest zbieżny. Jeśli tak, to znajdź jego sumę.

a) $15 + 5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \dots$,

b) $0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots$,

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \dots$,

d) $9 + 3\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} + \dots$,

e) $6\pi + 2\pi + \frac{2}{3}\pi + \dots$,

f) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$,

g) $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \dots$,

h) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$,

i) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \dots$,

j) $5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \dots$.

Zbieżność szeregów

Przy badaniu zbieżności szeregu korzystamy z wniosków wynikającego z kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów:

Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to szereg ten jest rozbieżny.

Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to przypadek jest wątpliwy i należy stosować inne kryteria.

Przykład 7. Zbadaj, czy podany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

W celu zbadania zbieżności podanego szeregu korzystamy z wniosków wynikających z kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów. Po podstawieniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(3n)!} &= \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)3(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)(3n)!} =$$

$$3 \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1)(3n+2) \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$3 \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1)(3n+2) \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{an} = e^a$, $a \neq 0$, więc

$$\frac{3}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (9n^2 + 9n + 2) = \infty.$$

Czyli szereg jest rozbieżny.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność podanych szeregów.

- $a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+3},$
 $b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{4^n},$
 $c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^n},$
 $d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$
 $e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{7^n},$
 $f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!},$
 $g) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{2n!},$
 $h) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n,$
 $i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{2n},$
 $j) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)^{\frac{n}{3}},$
 $k) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}},$
 $l) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n^3+1}\right)^{2n},$
 $m) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-7}\right)^{5n},$
 $n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+7}\right)^{\frac{n}{3}},$
 $o) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-5}{3n+7}\right)^{4n},$
 $p) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+7}\right)^{\frac{n}{4}},$
 $r) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}13^n}{17^n},$
 $s) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{30}25^n}{30^n},$
 $t) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^{n+2},$
 $u) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{n+1}.$

Przykład 8. Jaką wartość liczbową przedstawia ułamek $2, (43)$?

Rozwiązanie:

Przedstawiamy dany ułamek w postaci sumy

$$2, (43) = 2 + (0, 43 + 0, 0043 + 0, 000043 + \dots)$$

Wyrażenie w nawiasie jest szeregiem geometrycznym

$\sum_{i=1}^n \frac{43}{100^n}$ o wyrazie pierwszym $a_1 = \frac{43}{100}$ i ilorazie $q = \frac{1}{100}$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego $S = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1}{1-q}$ otrzymujemy, że sumą tego szeregu jest $\frac{0,43}{1-0,01} = \frac{43}{99} = \frac{43}{99}$. Stąd $2, (43) = 2 + \frac{43}{99} = 2\frac{43}{99}$.

Zadanie 8. Jaką wartość liczbową przedstawiają poniższe ułamki?

a) $0, (37)$,

b) $0, (33)$,

c) $2, (16)$,

d) $3, (43)$,

e) $2, 3(97)$,

f) $4, 5(38)$,

g) $0, 3(299)$,

h) $0, 5(314)$,

i) $2, 47(33)$,

j) $8, 59(47)$.

Odpowiedzi

Zadanie 1.

a) $a_n = 2n$, b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$, c) $a_n = -4$, d) $a_n = n^2$,
 e) $a_n = (n+1)(2n-1)$, f) $a_n = \frac{n}{3}$, g) $a_n = \frac{1}{3^n}$, h)
 $a_n = (-1)^n$, i) $a_n = n^2 + 2$, j) $a_n = (-1)^{n+1}3^n$, k)
 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., l) $a_n = ?$, m) $a_n = \frac{n}{2^n}$, n)
 $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, o) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$, p) $a_n = \sqrt{n}$, r) $a_n = n\pi$, s)
 $a_n = \frac{3n\pi}{2}$, t) $a_n = \frac{1}{7^n}$, u) $a_n = \frac{1}{n}$.

Zadanie 2.

a)

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{17}, a_5 = \frac{1}{33}, a_6 = \frac{1}{65},$$

$$b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{5}, b_3 = \frac{1}{7}, b_4 = \frac{1}{9}, b_5 = \frac{1}{11}, b_6 = \frac{1}{13},$$

b)

$$a_1 = \frac{-1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{-1}{8}, a_4 = \frac{1}{16}, a_5 = \frac{-1}{32}, a_6 = \frac{1}{64},$$

$$b_1 = \frac{-1}{2}, b_2 = \frac{1}{4}, b_3 = \frac{-1}{6}, b_4 = \frac{1}{8}, b_5 = \frac{-1}{10}, b_6 = \frac{1}{12},$$

c)

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = -1, a_5 = 0, a_6 = 1,$$

$$b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 5,$$

d)

$$a_1 = 4, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 11, a_5 = 19, a_6 = 35,$$

$$b_1 = 4, b_2 = 5, b_3 = 7, b_4 = 10, b_5 = 14, b_6 = 19,$$

e)

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 28, a_5 = 82, a_6 = 244, \\ b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 7, b_4 = 11, b_5 = 16, b_6 = 22.$$

Zadanie 3.

- a) wyrazy parzyste, b) brak rozwiązań, c) wyraz a_3 ,
d) wyrazy $a_1 - a_{10}$, e) wyrazy $a_1 - a_6$, f) brak rozwiązań,
g) wyraz a_2 , h) wyraz a_2 , i) wyrazy nieparzyste,
j) wyrazy a_1 i a_2 .

Zadanie 4.

- a) $p > 0$, b) $p = 1$, c) $p > 2n + 1$, d) $p > 0$, e) $p \in \mathfrak{R}$,
f) $p \in \mathfrak{R}$, g) $p > 0$, h) $p \in \{-9, -1, \}$, i) , j) .

Zadanie 5.

- a) 0, b) ∞ , c) $\frac{3}{2}$, d) ∞ , e) $-\infty$, f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, g) 0, h) 0, i) $-\infty$,
j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, k) 0, l) $\sqrt{5}$, m) $-\frac{3}{2}$, n) 0, o) 0, p) e^{-3} , r) e^{-10} ,
s) e^2 , t) e^{77} , u) ∞ .

Zadanie 6.

- a) $22\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{9}$, c) szereg rozbieżny, d) $\frac{9(3+\sqrt{3})}{2}$, e) 9π , f) $\frac{3}{2}$, g)
 $\frac{3}{10}$, h) szereg rozbieżny, i) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, j) szereg rozbieżny.

Zadanie 7.

Szeregi zbieżne: b, d, e, f, g, h, i, l, m, n, r, s, t.

Szeregi rozbieżne: a, c, j, k, o, p, u.

Zadanie 8.

- a) $\frac{37}{99}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $2\frac{16}{99}$, d) $3\frac{43}{99}$, e) $2\frac{197}{495}$, f) $4\frac{533}{990}$, g) $\frac{1648}{4995}$, h) $\frac{5309}{9990}$,
i) $2\frac{71}{150}$, j) $8\frac{5888}{9900}$.

:)

Wszystko należy upraszczać jak tylko można, ale nie bardziej.

Albert Einstein

Rozdział 2: Funkcja jednej zmiennej i jej własności

Przykład 1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = \sqrt{\frac{5-x}{x+4}} + \frac{\ln(x-3)}{\sqrt{2-x}} + \frac{\sqrt{7}}{x-4}$.

Rozwiązanie:

1) Pierwszy składnik sumy jest określony wtedy, gdy wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne oraz mianownik jest różny od zera, tzn. gdy

$$\frac{5-x}{x+4} \geq 0 \text{ i } x+4 \neq 0.$$

Czyli $(5-x)(x+4) \geq 0$ i $x+4 \neq 0$, co implikuje $x \in (-4, 5]$.

2) Drugi składnik sumy jest określony, gdy mianownik jest różny od zera, gdy wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne oraz gdy liczba logarytmowana jest dodatnia, tzn. gdy $\sqrt{x-2} \neq 0$, $2-x > 0$ oraz $x-3 > 0$. Po rozwiązaniu nierówności otrzymujemy, że $x \in (3, \infty)$.

3) Trzeci składnik sumy jest określony, gdy mianownik jest różny od zera, tzn. gdy $x-4 \neq 0$, czyli gdy $x \neq 4$.

Uwzględniając wszystkie warunki mamy

$$x \in (3, 4) \cup (4, 5].$$

Zadanie 1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$a) \quad y = x\sqrt{5-x},$$

$$b) \quad y = \frac{x^3-5x^2+6x}{\sqrt{6-x-2}},$$

$$c) \quad y = \frac{\sqrt{x^2-2x-15}}{\ln(6-x)} + \frac{\sqrt{6}}{x+7},$$

$$d) \quad y = \frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+2-2}},$$

$$e) \quad y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x},$$

$$f) \quad y = \frac{\sqrt{9-x-5}}{x^3-4x^2+3x},$$

$$g) \quad y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2},$$

$$h) \quad y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)},$$

$$i) \quad y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1},$$

$$j) \quad y = \log_3 x,$$

$$k) \quad y = \ln x - 2 \ln x + 2,$$

$$l) \quad y = \frac{4x}{2x^2+x-21},$$

$$m) \quad y = \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{4+x}}{x^2+2x-3},$$

$$n) \quad y = \frac{1}{x-3} - \frac{13}{x^3-27},$$

$$o) \quad y = \frac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{x+4} + \sqrt[3]{x+5},$$

$$p) \quad y = \frac{\ln(16-x^2)}{4^x-1},$$

$$r) \quad y = \frac{\ln(-x^2+3x+10)}{\sqrt{x-6}} + \frac{\sqrt{3}}{x-3},$$

$$s) \quad y = \sqrt{4x-x^2},$$

$$t) \quad y = \sqrt{\frac{4-x}{x+2}} - \frac{4 \ln(3-x)}{x+1},$$

$$u) \quad y = \frac{2}{x^2-169}.$$

Przykład 2. Obliczyć wartość funkcji $f(x) = \frac{x^4+2}{x^2-1}$ dla $x = -3$ i dla $x = 3$.

Rozwiązanie:

W miejsce x wstawiamy liczby -3 oraz 3 otrzymując

$$f(-3) = \frac{(-3)^4+2}{(-3)^2-1} = \frac{83}{8} \text{ oraz } f(3) = \frac{3^4+2}{3^2-1} = \frac{83}{8}.$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość funkcji w podanym punkcie

$$a) \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}, \quad f(0), \quad f(-2), \quad f(-0,5), \quad f(0,5)$$

$$b) \quad f(x) = -2x^3, \quad f(-2), \quad f(2), \quad f(\sqrt[3]{5}), \quad f(0),$$

$$c) \quad f(x) = -3(x-2)^4 + 5, \quad f(2), \quad f(0),$$

$$d) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3}, \quad f(\sqrt{3}), \quad f(0),$$

$$e) \quad f(x) = 2x\sqrt{-5x-4}, \quad f(-4), \quad f(-\frac{5}{4}), \quad f(\frac{5}{4}), \quad f(4),$$

$$f) \quad f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1, \quad f(-a), \quad f(a), \quad f(0,5a),$$

$$g) \quad f(x) = x^3, \quad \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h},$$

$$h) \quad f(x) = 4x - x^2, \quad f(a+1) - f(a-1).$$

$$i) \quad f(x) = \sin x, \quad f\left(\frac{-\pi}{2}\right), \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$j) \quad f(x) = \frac{2\cos x}{x+2}, \quad f(0), \quad f(\pi).$$

Przykład 3. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = 2^x - 3$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji $f(x) = 2^x$ są wszystkie liczby rzeczywiste, natomiast zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie. Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 3$ powstaje z przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o

wektor $\vec{a} = [0, -3]$. Dziedzina funkcji nie zmienia się, natomiast zbiorem wartości jest $(-3, \infty)$.

Zadanie 3. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji

$$a) \quad y = \frac{2}{x-5},$$

$$b) \quad y = \frac{-4}{3x-7},$$

$$c) \quad y = \sqrt{-x+3},$$

$$d) \quad y = x^2 - 2,$$

$$e) \quad y = \frac{1}{x^2+3},$$

$$f) \quad y = 4\sqrt{5x},$$

$$g) \quad y = -5x^2 + 17x - 33, \quad h) \quad y = |x^2 + x - 3|,$$

$$i) \quad y = \sin x,$$

$$j) \quad y = \sin 2x,$$

$$k) \quad y = 2\sin x,$$

$$l) \quad y = \sin x + 2,$$

$$m) \quad y = 7^x,$$

$$n) \quad y = 7^{-x},$$

$$o) \quad y = -7^x,$$

$$p) \quad y = 7^x + 3,$$

$$r) \quad xy = 5,$$

$$s) \quad y = \frac{1}{x} + 1,$$

$$t) \quad y = |x| - 4,$$

$$u) \quad y = |x - 2|.$$

Przykład 4. Wyznaczyć punkty przecięcia wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x+11}}{x+5} \text{ z osiami układu współrzędnych.}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathfrak{R}$ wartość wyrażenia

$x^2 + 1$ jest dodatnia. Stąd funkcja jest określona, gdy $3x + 11 > 0$ oraz gdy $x + 5 \neq 0$.

Dziedziną funkcji jest zatem zbiór $(-\frac{11}{3}, \infty)$.

Jeżeli wykres funkcji przecina oś ox , to wtedy rzędna tego punktu jest równa zero. Stąd

$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x+11}}{x+5} = 0$. Ułamek jest równy zero wtedy i

tylko wtedy, gdy jego licznik jest równy zero. Zatem

$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x+11} = 0$. To implikuje, że

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3x+11}$. Podnosimy obustronnie do kwadratu i otrzymujemy

$|x^2+1| = |3x+11|$. Korzystając z określenia wartości bezwzględnej mamy

$x^2+1 = 3x+11$ lub $x^2+1 = -(3x+11)$. Po przeniesieniu na jedną stronę

$x^2-3x-1 = 0$ lub $x^2+3x+1+12 = 0$. Pierwiastkami pierwszego równania są $x = -2$ oraz $x = 5$.

Oba te pierwiastki należą do dziedziny funkcji. Wyróżnik drugiego równania kwadratowego jest mniejszy od zera, czyli równanie to nie ma pierwiastków rzeczywistych. Zatem punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x+11}}{x+5}$ z osią ox to $(-2, 0)$ oraz $(5, 0)$.

Jeżeli wykres funkcji przecina oś oy , to wtedy odcięta tego punktu jest równa zero. Podstawiamy $x = 0$ do wzoru funkcji i otrzymujemy $f(0) = -\sqrt{2}$. Czyli wykres funkcji przecina oś oy w punkcie $(0, \sqrt{2})$.

Zadanie 4. Wyznaczyć punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych

$$a) \quad y = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1},$$

$$b) \quad y = \frac{\sqrt{x+4} - x}{\sqrt{x^2 + 3}},$$

$$c) \quad y = 5(7 - x)(2x + 5),$$

$$d) \quad y = \frac{\sqrt{x+6} - x}{\sqrt{x^2 - x + 4}},$$

$$e) \quad y = \frac{1}{x^2 + 3},$$

$$f) \quad y = 4\sqrt{5x},$$

$$g) \quad y = \frac{2}{x^2 + 2},$$

$$h) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}},$$

$$i) \quad y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}},$$

$$j) \quad y = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 + x + 5},$$

$$k) \quad y = 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt{1-x},$$

$$l) \quad y = 3\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x-2}},$$

$$m) \quad y = \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{4 - 5x},$$

$$n) \quad y = \frac{x-7}{-12x^2 - 25x + 22},$$

$$o) \quad y = \frac{-7}{x^2 + 3x - 5},$$

$$p) \quad y^2 = 2x,$$

$$r) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5x + 7}}{x^2 + 2x + 5},$$

$$s) \quad y^2 = x^2 - 3x + 2,$$

$$t) \quad \sqrt{1 - x^2} = 1 - y,$$

$$u) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 30} - \sqrt{1 - 11x}}{3x^3 - 5x^2 - 7x + 3}.$$

Funkcja różnowartościowa

Funkcja jest różnowartościowa, jeżeli dla każdej pary x_1, x_2 należącej do dziedziny, takich że $x_1 \neq x_2$ odpowiednie wartości funkcji spełniają relację

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Przykład 5. Czy funkcja $y = x^2 - 10x + 21$ jest różnowartościowa w przedziale $(1, 8)$?

Rozwiązanie:

W celu rozwiązania zadania przyjmijmy, że $x_1 \neq x_2$.

Obliczamy

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \\ x_1^2 - 10x_1 + 21 - x_2^2 + 10x_2 - 21 &= \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 10(x_1 - x_2) &= \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 10) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd $f(x_1) = f(x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ lub $x_1 + x_2 - 10 = 0$. Pierwszy warunek nie może być spełniony. Zatem sprawdzamy, czy $x_2 = 10 - x_1$ dla $x_1, x_2 \in (1, 8)$.

Weźmy $x_1 = 3$, wtedy $x_2 = 7$. Obie wartości x_1 oraz x_2 należą do dziedziny i równocześnie $f(x_1) = f(x_2)$. Czyli funkcja $y = x^2 - 10x + 21$ nie jest różnowartościowa w przedziale $(1, 8)$.

Zadanie 5. Czy podane funkcje są różnowartościowe w podanych przedziałach? Uzasadnij swoją odpowiedź.

$$a) \quad y = \frac{x+2}{x-2}, \quad (-\infty, 2), \qquad b) \quad y = \frac{x+4}{x-5}, \quad (5, \infty),$$

$$c) \quad y = x^2 + 3x + 3, \quad (-\infty, 0), \qquad d) \quad y = x^2, \quad [0, \infty),$$

$$e) \quad y = -2x^2 + x - 3, \quad (-7, 7), \qquad f) \quad y = \frac{3x^2}{x^2+1}, \quad [-1, \infty),$$

$$g) \quad y = x^2 + 7, \quad (-2, \infty), \qquad h) \quad y = x^2, \quad [-5, 5),$$

$$i) \quad y = (x-2)^2, \quad [-1, 5), \qquad j) \quad y = \frac{9}{x^2+1}, \quad [0, \infty),$$

$$k) \quad y = 2x^2 + 2, \quad (-\infty, \infty), \qquad l) \quad y = |x|, \quad [0, \infty),$$

$$m) \quad y = 2x^2 + 2, \quad (-\sqrt{11}, 0, 73), \qquad n) \quad y = |x|, \quad [-8, 13),$$

$$o) \quad y = |x+3|, \quad (-\infty, 0), \qquad p) \quad y = |x+3|, \quad [0, \infty),$$

$$r) \quad y = (x-2)^2, \quad [2, \infty), \qquad s) \quad y = \frac{9}{x^2+1}, \quad [-5, 5),$$

$$t) \quad y = -6x^2 + x + 35, \quad (-2, -1), \qquad u) \quad y = \frac{2x}{x^2+1}, \quad [0, \infty).$$

Parzystość funkcji

Jeżeli dla każdego $x \in D$, $-x \in D$ oraz $f(-x) = f(x)$, to funkcja jest parzysta.

Jeżeli dla każdego $x \in D$, jeżeli $-x \in D$ oraz $f(-x) = -f(x)$, to funkcja jest nieparzysta.

Przykład 6. Czy funkcja $y = -2x^5 + 4x^2 - 3x + \sqrt{3}$ jest parzysta, czy jest nieparzysta?

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć czy funkcja jest parzysta, czy nieparzysta obliczamy odpowiednie wartości. Mamy zatem

$$f(x) = -2x^5 + 4x^2 - 3x + \sqrt{3}.$$

$$f(-x) = -2(-x)^5 + 4(-x)^2 - 3(-x) + \sqrt{3}$$

$$f(-x) = 2x^5 + 4x^2 + 3x + \sqrt{3} \neq f(x).$$

Czyli funkcja nie jest parzysta.

Stąd

$$f(-x) = 2x^5 + 4x^2 + 3x + \sqrt{3}.$$

$$-f(x) = -(-2x^5 + 4x^2 - 3x + \sqrt{3}) =$$

$$2x^5 - 4x^2 + 3x - \sqrt{3} \neq f(-x).$$

Zatem funkcja nie jest nieparzysta.

Zadanie 6. Czy podane funkcje są parzyste, czy są nieparzyste?
Uzasadnij swoją odpowiedź.

$$a) \quad y = \frac{x^2}{x^2+2},$$

$$b) \quad y = \frac{x+3}{x^2+1},$$

$$c) \quad y = \sqrt{-x+3},$$

$$d) \quad y = x^2 - 2,$$

$$e) \quad y = 2x^3 + 5x^7,$$

$$f) \quad y = 3^{2x} + 3^{-2x},$$

$$g) \quad y = 3x^4 - 5x^3 + 1,$$

$$h) \quad y = 3^x,$$

$$i) \quad y = \sin x,$$

$$j) \quad y = \cos x,$$

$$k) \quad y = 3(2^x - 2^{-x}),$$

$$l) \quad y = 2^x + 2^{-x},$$

$$m) \quad y = |x|,$$

$$n) \quad y = \frac{\sqrt{5}}{1+x^2},$$

$$o) \quad y = |x| - x,$$

$$p) \quad y = \frac{x}{1+x^2},$$

$$r) \quad y = (x+1)^3,$$

$$s) \quad y = x^3 + 1,$$

$$t) \quad y = 4x^2 + x^6 - 2,$$

$$u) \quad y = 4x^2 + x^6 + x - 2.$$

Przykład 7. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji
 $f(x) = \ln(x-2) + 3$.

Rozwiązanie:

Możemy wyznaczyć funkcję odwrotną do danej funkcji, gdy jest ona różnowartościowa. Zatem ze związku $y = f(x)$ należy wyznaczyć związek $x = g(y)$.

Funkcja $f(x) = \ln(x - 2) + 3$ jest różnowartościowa, a stąd $y = \ln(x - 2) + 3$. Wyznaczamy x .
 $\ln(x - 2) = y - 3$. Z definicji logarytmu
 $e^{y-3} = x - 2$. Dodajemy obustronnie 2 i mamy
 $x = e^{y-3} + 2$. Po zamianie oznaczeń
 $y = e^{x-3} + 2$.

Zadanie 7. Wyznaczyć funkcję odwrotną do danej w podanych przedziałach

a) $f(x) = x, x \in [-2, 5],$

b) $f(x) = 3x, x \in \mathbb{R},$

c) $f(x) = 1 - 5x, x \in (-\infty, 4],$

d) $f(x) = x^2 + 2, x \in [4, \infty),$

e) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty),$

f) $f(x) = \frac{3}{1-x}, x \in (1, \infty),$

g) $f(x) = x^2 - 3, x \in [0, 100],$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}, x \in [-4, 8],$

i) $f(x) = \ln x, x \in \mathbb{R}$

j) $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R},$

$$\text{k)} \quad f(x) = 4 - \log x, \quad x \in [8, 251],$$

$$\text{l)} \quad f(x) = \ln x + 7, \quad x \in \mathfrak{R},$$

$$\text{m)} \quad f(x) = \frac{1}{10^x + 3}, \quad x \in (-, \infty),$$

$$\text{n)} \quad f(x) = \frac{11}{1 - e^x}, \quad x \in [2, 5],$$

$$\text{o)} \quad f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 5, \quad x \in \mathfrak{R},$$

$$\text{p)} \quad f(x) = x^3 - 7, \quad x \in [-33, 15],$$

$$\text{r)} \quad f(x) = 2x^3 + 3, \quad x \in [-9, 0],$$

$$\text{s)} \quad f(x) = 2 + 10^x, \quad x \in [1, \infty),$$

$$\text{t)} \quad f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9, \quad x \in [-5, 10],$$

$$\text{u)} \quad f(x) = 3 - e^x, \quad x \in [-2, 2] .$$

Przykład 8. Dla podanych funkcji $f(x) = x^4$, $g(x) = x - 7$, $h(x) = \sin x$ wykonaj złożenia.

Rozwiązanie:

$$f(g(x)) = f(x - 7) = (x - 7)^4,$$

$$f(h(x)) = f(\sin x) = \sin^4 x,$$

$$g(f(x)) = g(x^4) = x^4 - 7,$$

$$g(h(x)) = g(\sin x) = \sin x - 7,$$

$$h(f(x)) = h(x^4) = \sin x^4,$$

$$h(g(x)) = h(x - 7) = \sin(x - 7),$$

$$f(f(x)) = f(x^4) = x^{16},$$

$$g(g(x)) = g(x - 7) = x - 14,$$

$$h(h(x)) = h(\sin x) = \sin(\sin x),$$

$$f(g(h(x))) = f(\sin x - 7) = (\sin x - 7)^4,$$

$$f(h(g(x))) = f(\sin(x - 7)) = \sin^4(x - 7),$$

$$g(f(h(x))) = g(\sin^4 x) = \sin^4 x - 7,$$

$$g(h(f(x))) = g(\sin x^4) = \sin x^4 - 7,$$

$$h(f(g(x))) = h((x - 7)^4) = \sin(x - 7)^4,$$

$$h(g(f(x))) = h(x^4 - 7) = \sin(x^4 - 7).$$

Zadanie 8. Dla podanych funkcji wykonaj złożenia
 $f(f(x))$, $g(f(x))$, $f(g(x))$, $g(g(x))$.

$$a) \quad f(x) = x^4 - 2x^2, \quad g(x) = \ln x,$$

$$b) \quad f(x) = 4 + 3^x, \quad g(x) = \cos x,$$

$$c) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x^3,$$

$$d) \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin x,$$

$$e) \quad f(x) = 3^x, \quad g(x) = \cos x,$$

$$f) \quad f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = 3x^2,$$

$$g) \quad f(x) = 2^x, \quad g(x) = -x^3 - 2x + 1,$$

$$h) \quad f(x) = \ln x, \quad g(x) = 2x.$$

$$i) \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \sqrt{x},$$

$$j) \quad f(x) = \log x, \quad g(x) = ,$$

$$k) \quad f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2 + 1,$$

$$l) \quad f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x + 7,$$

$$m) \quad f(x) = x - 3, \quad g(x) = 3x^2 + 5x - 7,$$

$$n) \quad f(x) = -x^5 - x^2, \quad g(x) = x + 11,$$

$$o) \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \cos x,$$

$$p) \quad f(x) = 4^x, \quad g(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$r) \quad f(x) = \log_3 x, \quad g(x) = 2x^2 + 7,$$

$$s) \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$t) \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - 4, \quad g(x) = \frac{x}{2},$$

$$u) \quad f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = x^2 - x.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $x \in (-\infty, 5]$, b) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 6)$,
 c) $x \in (-\infty, -7) \cup (-7, -3] \cup (5, 6)$, d) $x \in (-\infty, -2]$,
 e) $x \in [-4, 0]$, f) $x \in (-\infty, 9] \setminus \{0, 1, 3\}$, g) $x \in [-2, 1)$,
 h) $x \in [1, 4]$, i) $x \in \{1\}$, j) $x \in (0, \infty)$, k) $x \in (0, \infty)$,
 l) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 5, 3\}$, m) $x \in [-4, 5] \setminus \{-3, 1\}$,
 n) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, o) $x \in [-4, 3] \setminus \{2\}$, p) $x \in (-4, 4) \setminus \{0\}$,
 r) funkcja nie jest określona, s) $x \in [0, 4]$,
 t) $x \in (-2, 3) \setminus \{-1\}$, u) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-13, 13\}$.

Zadanie 2.

- a) $f(0) = 1$, $f(-2) = -\frac{3}{5}$, $f(-\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1, 6$,
 b) $f(-2) = 16$, $f(2) = -16$, $f(\sqrt[3]{5}) = -10$, $f(0) = 0$,
 c) $f(2) = 5$, $f(0) = -43$, d) $f(\sqrt{3}) = \sqrt{6}$,
 e) $f(-4) = -32$, $f(-\frac{5}{4}) = -\frac{15}{4}$, $f(\frac{5}{4})$ i $f(4)$ funkcja nie jest określona,
 f) $f(-a) = 2a^4 + 3a^2 + 1$, $f(a) = 2a^4 + 3a^2 + 1$, $f(\frac{a}{2}) = \frac{a^4}{8} + \frac{3a^2}{4} + 1$, g) $\frac{(x+h)^3 - (x-h)^3}{h} = 6x^2 + 2h^2$,
 h) $f(a+1) - f(a-1) = 8 - 4a$,
 i) $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$,
 j) $f(0) = 1$, $f(\pi) = \frac{-2}{2+\pi}$.

Zadanie 3.

- a) $Z_w = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, b) $Z_w = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$,
 c) $Z_w = [0, \infty)$, d) $Z_w = [-2\infty, \infty)$, e) $Z_w = (0, \frac{1}{3}]$,
 f) $Z_w = [0, \infty)$, g) $Z_w = (-\infty, -18, 55]$,
 h) $Z_w = [\frac{13}{4}, \infty)$, i) $Z_w = [-1, 1]$, j) $Z_w = [-1, 1]$,
 k) $Z_w = [-2, 2]$, l) $Z_w = [1, 3]$, m) $Z_w = [0, \infty)$,

- n) $Z_w = [0, \infty)$, o) $Z_w = [0, \infty)$, p) $Z_w = (3, \infty)$,
 r) $Z_w = \mathbb{R}/\{0\}$, s) $Z_w = \mathbb{R}/\{1\}$, t) $Z_w = [-4, \infty)$,
 u) $Z_w = [2, \infty)$.

Zadanie 4.

- a) $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -1)$, b) $(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, 0)$, $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$,
 c) $(-1, 0)$, $(6, 0)$, $(0, \frac{1-\sqrt{7}}{5})$, d) $(3, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$,
 e) $(0, \frac{1}{3})$, f) $(0, 0)$, g) $(0, 1)$, h) funkcja nie przecina osi,
 i) $(-2, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, j) $(4, 0)$, $(0, -\frac{2}{5})$, k) $(1, 0)$,
 l) funkcja nie przecina osi, m) funkcja nie przecina osi,
 n) $(7, 0)$, $(0, -\frac{7}{22})$, o) $(0, \frac{7}{5})$, p) $(0, 0)$,
 r) $(-1, 0)$, $(6, 0)$, $(0, \frac{1-\sqrt{7}}{5})$, s) $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -\frac{1}{4})$,
 t) $(0, 0)$, u) $(\frac{-11-\sqrt{5}}{2}, 0)$, $(\frac{-11+\sqrt{5}}{2}, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{30}-1}{3})$.

Zadanie 5.

Funkcje różnowartościowe: a, b, m, o, p, r, t.

Funkcje, które nie są różnowartościowe: c, d, e, f, g, h, i,
 j, k, l, n, s, u.

Zadanie 6.

Funkcje parzyste: a, d, f, j, k, l, m, n, t.

Funkcje nieparzyste: e, i, p.

Funkcje, które nie są parzyste i nie są nieparzyste: b, c, g,
 h, o, r, s, u.

Zadanie 7.

- a) $g(y) = y$, b) $g(y) = \frac{1}{3}y$, c) $g(y) = \frac{1}{5}(1 - y)$,
 d) $g(y) = \sqrt{y-2}$, e) $g(y) = \frac{1}{y}$,
 f) $g(y) = \frac{y-3}{y}$, g) $g(y) = \sqrt{y-3}$,
 h) $g(y) = \sqrt[3]{y^3-1}$, i) $g(y) = e^y$, j) $g(y) = \frac{\ln y}{\ln 3}$,

- k) $g(y) = 10^{4-y}$, l) $g(y) = e^{y-7}$,
 m) $g(y) = \lg \frac{1-3y}{y}$, n) $g(y) = \ln \frac{y-11}{y}$,
 o) $g(y) = \sqrt[3]{y+3} - 2$, p) $g(y) = \ln(y-3)$,
 r) $g(y) = \sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}$, s) $g(y) = \lg(y-2)$,
 t) $g(y) = \sqrt[3]{-y-1} + 2$, u) $g(y) = \ln(y-3)$.

Zadanie 8.

- a) $f(f(x)) = (x^4 - 2x^2)^2((x^4 - 2x^2)^2 - 2)$, $g(f(x)) = \ln(x^4 - 2x^2)$, $f(g(x)) = \ln^4 x - 2 \ln^2 x$, $g(g(x)) = \ln(\ln x)$,
 b) $f(f(x)) = 4 + 3^{4+3^x}$, $g(f(x)) = \cos(4 + 3^x)$, $f(g(x)) = 4 + 3^{\cos x}$, $g(g(x)) = \cos(\cos x)$,
 c) $f(f(x)) = x^{\frac{1}{4}}$, $g(f(x)) = 2\sqrt{x^3}$, $f(g(x)) = \sqrt{2x^3}$, $g(g(x)) = 2x^{2x^3}$,
 d) $f(f(x)) = x^9$, $g(f(x)) = \sin x^3$, $f(g(x)) = \sin^3 x$, $g(g(x)) = \sin(\sin x)$,
 e) $f(f(x)) = 27^x$, $g(f(x)) = \cos 3^x$, $f(g(x)) = 3^{\cos x}$, $g(g(x)) = \cos(\cos x)$,
 f) $f(f(x)) = x$, $g(f(x)) = 12x^{-2}$, $f(g(x)) = \frac{2}{3x^2}$, $g(g(x)) = 27x^4$,
 g) $f(f(x)) = 4^x$, $g(f(x)) = -8^x - 2^{x+1} + 1$, $f(g(x)) = 2^{-x^3-2x+1}$, $g(g(x)) = x^9 + 6x^7 - 3x^6 + 12x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 10x - 2$,
 h) $f(f(x)) = \ln(\ln x)$, $g(f(x)) = 2 \ln x$, $f(g(x)) = \ln(2x)$, $g(g(x)) = 4x$,
 i) $f(f(x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$, $g(f(x)) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $f(g(x)) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$, $g(g(x)) = x^{\frac{1}{4}}$,
 j) $f(f(x)) = \log(\log x)$, $g(f(x)) = \log^4 x$, $f(g(x)) = \log x^4$, $g(g(x)) = x^{16}$,
 k) $f(f(x)) = e^{e^x}$, $g(f(x)) = e^{x^2} + 1$, $f(g(x)) = e^{x^2+1}$, $g(g(x)) = x^4 + 2x^2 + 2$,

$$\text{l) } f(f(x)) = \log_2(\log_2 x), g(f(x)) = \log_2 x + 7, f(g(x)) = \log_2(x + 7), g(g(x)) = x + 14,$$

$$\text{m) } f(f(x)) = x - 6, g(f(x)) = 3x^2 - 13x + 5, f(g(x)) = 3x^2 + 5x - 10, g(g(x)) = 27x^4 + 90x^3 - 36x^2 - 185x + 105,$$

$$\text{n) } f(f(x)) = x^{25} + 5x^{22} + 10x^{19} + 5x^{13} - 2x^7 - x^4, g(f(x)) = -x^5 - x^2 + 11, f(g(x)) = -(x + 11)^2(x^3 + 33x^2 + 363x + 1330), g(g(x)) = x + 22,$$

$$\text{o) } f(f(x)) = x, g(f(x)) = \cos \frac{1}{x}, f(g(x)) = \frac{1}{\cos x}, g(g(x)) = \cos(\cos x),$$

$$\text{p) } f(f(x)) = 256^x, g(f(x)) = \operatorname{tg} 4^x, f(g(x)) = 4^{\operatorname{tg} x}, g(g(x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x),$$

$$\text{r) } f(f(x)) = \log^3(\log_3 x), g(f(x)) = 2\log_3^2 x + 7, f(g(x)) = \log_3(2x^2 + 7), g(g(x)) = 8x^4 + 56x^2 + 105,$$

$$\text{s) } f(f(x)) = \sin(\sin x), g(f(x)) = \operatorname{tg}(\sin x), f(g(x)) = \sin(\operatorname{tg} x), g(g(x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x),$$

$$\text{t) } f(f(x)) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 4} - 4, g(f(x)) = \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{2}, f(g(x)) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}} - 4, g(g(x)) = \frac{x}{4},$$

$$\text{u) } f(f(x)) = x, g(f(x)) = \frac{2(2-x)}{x^2}, f(g(x)) = \frac{2}{x^2-x}, g(g(x)) = x^4 - 2x^3 + x.$$

:)

Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie, od razu przekładają to na swój własny język i wówczas staje się to czymś zupełnie innym.

Johann Wolfgang Goethe

Rozdział 3: Granica funkcji, asymptoty, ciągłość

Przykład 1. Wyznaczyć granicę funkcji $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^{x+3}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^{x+3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^3$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^3 = 1 \text{ wobec faktu,}$$

$$\text{że } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{-2x} \right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-2x}{3}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{-2x}{3}} \right)^{\frac{-2x}{3}} \right)^{x \cdot \frac{3}{-2x}}$$

Wyrażenie w nawiasie jest równe liczbie e , więc cała granica wynosi $e^{-\frac{3}{2}}$.

$$\text{Ostatecznie } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x} \right)^{x+3} = 1 \cdot e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

Zadanie 1. Wyznaczyć granice funkcji

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 + 2x - 3)}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16-x-x^2} - \sqrt{16-x^2}}{4x}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x - 1}{x^3 - 7}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 11}, \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5} - 5}{\sqrt{5+3x} - \sqrt{11}}, \quad j) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x,$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{3x}, \quad l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x,$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x(x-4)(9-2x)}, \quad n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x} \right)^{-x},$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x\sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + 2x - 5} \right), \quad p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x,$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^4}{4} + x^3 - 7 \right), \quad s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x},$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7} - 2x \right), \quad u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^3 - 8}.$$

Asymptoty

Funkcja może mieć asymptoty pionowe, poziome i ukośne.

Asymptoty pionowe mogą istnieć w punktach, które nie należą do dziedziny funkcji.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, to funkcja posiada asymptotę poziomą o równaniu $y = b$.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, to prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną.

Zauważmy, że asymptotę poziomą możemy traktować jako szczególny przypadek asymptoty ukośnej (dla $a = 0$).

Przykład 2. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $y = \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

Asymptoty pionowe mogą istnieć w punktach, które nie należą do dziedziny funkcji. A zatem

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} &= \left[\frac{-33}{0^-} \right] = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} &= \left[\frac{-33}{0^+} \right] = -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} = \left[\frac{19}{0^+} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} = \left[\frac{19}{0^-} \right] = -\infty,$$

gdzie symbole 0^- oraz 0^+ oznaczają liczbę bliską zera odpowiednio ujemną i dodatnią. Zatem proste $x = -2$ i $x = 2$ są asymptotami pionowymi.

Asymptota pozioma istnieje wtedy, gdy granica z funkcji w nieskończoności jest liczbą. Zatem liczymy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\frac{x^3}{x^2} + 5\frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5\frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\frac{x^3}{x^2} + 5\frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5\frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-1} = \infty.$$

Zatem asymptota pozioma nie istnieje.

Aby wyznaczyć asymptotę ukośną liczymy dwie granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{4x - x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\frac{x^3}{x^3} + 5\frac{x}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{4\frac{x}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5\frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{4\frac{1}{x^2} - 1} = -2$$

Czyli $a = -2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 5x - 7}{4 - x^2} + 2x \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 7 + 2x(4 - x^2)}{4 - x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x - 7}{4 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13 \frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13 \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} &= \frac{0}{-1} = 0. \end{aligned}$$

Stąd $b = 0$, co implikuje, że prosta $y = -2x$ jest asymptotą ukośną.

Zadanie 2. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji

$$a) \quad y = \frac{4x^2+x-3}{x-2},$$

$$b) \quad y = \frac{5x^2-5x+6}{x-6},$$

$$c) \quad y = x + \frac{1}{x} + 3,$$

$$d) \quad y = \frac{2x^3}{x^2-x-2},$$

$$e) \quad y = \frac{x^2-49}{2x^2-32},$$

$$f) \quad y = \frac{3x^3-5}{x^2+x-2},$$

$$g) \quad y = \frac{2x^2-11}{x+3},$$

$$h) \quad y = \frac{x^3+9}{x^2-9},$$

$$i) \quad y = \frac{x^2}{1+x^2},$$

$$j) \quad y = \frac{-4x^2+x-5}{8-x},$$

$$k) \quad y = \frac{x^2+x+1}{1-2x},$$

$$l) \quad y = \frac{2x(3x^2-1)}{-x^2-2x+15},$$

$$m) \quad y = \frac{3x^3-1}{x^2},$$

$$n) \quad y = \frac{x^2-16}{x^2-9},$$

$$o) \quad y = \frac{3-x}{x+5} - 2,$$

$$p) \quad y = \frac{2x^3-7}{x^2},$$

$$r) \quad y = \frac{5}{x} + \frac{x}{5},$$

$$s) \quad y = x + \frac{2}{x},$$

$$t) \quad y = x^3 + 3x^2 - 13x - 15, \quad u) \quad y = \frac{(x^2-3x+1)(x-2)}{2x^2+1}.$$

Ciągłość funkcji

Funkcja jest ciągła w punkcie x_0 jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Przykład 3. Zbadać jej ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{dla } x < 0 \\ e^x + 1 & \text{dla } 0 \leq x < 2 \\ -3 & \text{dla } x = 2 \\ (x-2)^2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Każda z funkcji wchodzących w skład rozważanej funkcji $f(x)$ jest ciągła w przedziale jej określoności. Nieciągłość może wystąpić tylko w punktach wyznaczających końce przedziałów, czyli gdy $x = 0$ lub $x = 2$.

Zatem liczymy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2, \text{ wobec}$$

$$\text{wzoru } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) = 2,$$

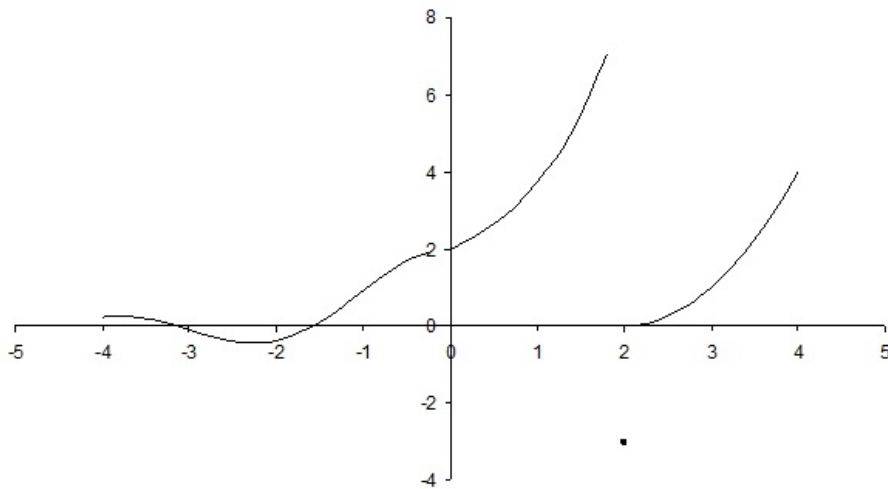
$$f(0) = e^0 + 1 = 2.$$

Czyli w punkcie $x_0 = 0$ funkcja jest ciągła.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (e^x + 1) = e^2 + 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2)^2 = 0$$

$f(2) = -3$. Czyli w punkcie $x_0 = 2$ funkcja nie jest ciągła.



Rysunek 1: Wykres funkcji z przykładu 3.

Zadanie 3. Narysować wykres podanej funkcji i zbadać jej ciągłość

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \leq x < 3 \\ 4 - x, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2, & x \leq -1 \\ 2^{x+2}, & x > -1 \end{cases},$$

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x \leq 0 \\ (x - 2)^2, & x > 0 \end{cases},$$

$$e) \quad f(x) = \begin{cases} 0, 5x, & |x| \leq 2 \\ -1, & |x| > 2 \end{cases},$$

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ \log x, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$g) \quad f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2, & x < 0 \\ 2^{-x} + 3, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$h) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases},$$

$$i) \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 2x - 1, & x < \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$j) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 2 \\ 2, & x = 2 \\ (x - 2)^2, & x < 2 \end{cases},$$

$$k) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases},$$

$$l) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$m) \quad f(x) = \begin{cases} 2, & |x| < 1 \\ 2, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases},$$

$$n) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & |x| \leq 2 \\ 1, & |x| > 2 \end{cases},$$

$$o) \quad f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$p) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 9 - x^2, & |x| \leq 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases},$$

$$r) \quad f(x) = \begin{cases} -(x - 1)^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$s) \quad f(x) = \begin{cases} -(x - 5)^2, & x > 5 \\ 2, & x = 5 \\ -x + 5, & x < 5 \end{cases},$$

$$t) \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x-3), & x > 3 \\ -2, & x = 3 \\ x^2 - 9, & x < 3 \end{cases},$$

$$u) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x > 2 \\ 2, & x \leq 2 \end{cases}.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) 2, b) $\frac{1}{8}$, c) $-\frac{1}{32}$, d) ∞ , e) 2, f) ∞ , g) ∞ , h) $-\infty$,
 i) $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$, j) e^2 , k) e^9 , l) e , m) 0, n) $e^{-\frac{3}{2}}$, o) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 p) ∞ , r) ∞ , s) e^{-2} , t) $-\infty$, u) $\frac{1}{4}$.

Zadanie 2.

- a) $x = 2$, $y = 4x + 9$, b) $x = 6$, $y = 5x + 25$,
 c) $x = 0$, $y = x + 3$, d) $x = -1$, $x = 2$, $y = 2x + 2$,
 e) $x = -4$, $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$, f) $x = -2$, $x = 1$, $y = 3x - 3$,
 g) $x = -3$, $y = 2x - 6$, h) $x = -3$, $x = 3$, $y = x$,
 i) $y = 1$, j) $x = 8$, $y = 4x + 31$,
 k) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, l) $x = -5$, $x = 3$, $y = -6x + 12$,
 m) $x = 0$, $y = 3x$, n) $x = -3$, $x = 3$, $y = 1$,
 o) $x = -5$, $y = -3$, p) $x = 0$, $y = 2x$,
 r) $x = 0$, $y = \frac{1}{5}x$, s) $x = 0$, $y = x$,
 t) brak asymptot, u) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Zadanie 3.

Funkcje ciągłe: a, d, f, g.

Funkcje nieciągłe: b, c, e, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, u.

:)

Matematycy są ekscentryczni z najlepszego z możliwych powodów - z definicji.

John Bowers

Rozdział 4: Pochodna funkcji

Pochodna funkcji

Pochodną funkcji nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu funkcji Δy do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej Δx , gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera, czyli granicę

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Podstawowe wzory na pochodne

$$(c)' = 0, \text{ gdzie } c = \text{const},$$

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < \arccos x < \pi,$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < \operatorname{arctg} x < \pi,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0,$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykład 1. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x+3} - 5$ korzystając z definicji.

Rozwiązanie:

Z określenia pochodnej funkcji

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x + 3} - 5 - \sqrt{x + 3} + 5}{\Delta x} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x + 3} - \sqrt{x + 3})(\sqrt{x + \Delta x + 3} + \sqrt{x + 3})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x + 3} + \sqrt{x + 3})} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x + 3} + \sqrt{x + 3})} &= \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x + 3} - \sqrt{x + 3}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}.$$

Zadanie 1. Obliczyć pochodną funkcji korzystając z definicji

$$a) \quad y = x^2, \qquad b) \quad y = x^3,$$

$$c) \quad y = \sqrt{x}, \qquad d) \quad y = \frac{1}{x},$$

$$e) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad f) \quad y = \frac{1}{x^2},$$

$$g) \quad y = x^2 + 3x, \qquad h) \quad y = \sqrt{x + 2},$$

$$i) \quad y = \sqrt{x^2 + 5}, \qquad j) \quad y = \sqrt{x^2 + x},$$

$$k) \quad y = \sqrt[3]{x}, \qquad l) \quad y = \sqrt{x + 4} - 2,$$

$$m) \quad y = x^3 + 5x^2, \qquad n) \quad y = \frac{1}{x+1},$$

$$o) \quad y = \frac{1}{x^2+3}, \qquad p) \quad y = \frac{1}{x^2+x},$$

$$r) \quad y = x + \frac{1}{x}, \qquad s) \quad y = x + \sqrt{x},$$

$$t) \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad u) \quad y = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Przykład 2. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{2^x + 3 \ln x - 5}{2x^3 - 4}$ korzystając z podstawowych wzorów.

Rozwiązanie:

W pierwszym kroku korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji

$$f'(x) = \frac{(2^x + 3 \ln x - 5)'(2x^3 - 4) - (2^x + 3 \ln x - 5)(2x^3 - 4)'}{(2x^3 - 4)^2}.$$

Korzystając z podstawowych wzorów zauważmy, że $(2^x)' = 2^x \ln 2$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(2x^3 - 4)' = 6x^2$ i stąd otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 + \frac{1}{x})(2x^3 - 4) - (2^x + 3 \ln x - 5)6x^2}{(2x^3 - 4)^2}.$$

Zadanie 2. Obliczyć pochodną funkcji korzystając z podstawowych wzorów

$$a) \quad y = 5x^3 - 9x^2 + 4x - 4, \quad b) \quad y = (2x - 1)^3,$$

$$c) \quad y = 5\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} - 9, \quad d) \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}},$$

$$e) \quad y = \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x} + \sqrt{11}, \quad f) \quad y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 5},$$

$$g) \quad y = (1 + x^2)(2x^3 + 3), \quad h) \quad y = 8e^x,$$

$$i) \quad y = \frac{8x^4 - x^2 + 4x - 7}{x^2 + 9}, \quad j) \quad y = \frac{5 \ln x}{x},$$

$$k) \quad y = 2x^3 - x^2 + x - 1, \quad l) \quad y = 3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3},$$

$$m) \quad y = (5x^2 - 3x + 1)(2x - 3), \quad n) \quad y = (x + 1) \cos x,$$

$$o) \quad y = 4 \operatorname{tg} x - \sin x, \quad p) \quad y = x^2 e^x,$$

$$r) \quad y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[5]{x^4}, \quad s) \quad y = \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x},$$

$$t) \quad y = \frac{2}{x^3 \sqrt{x}}, \quad u) \quad y = \frac{3x - 1}{5 \sqrt[3]{x + 7}}.$$

Przykład 3. Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = 2\sqrt{3} \cos^3 \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} + 11.$$

Rozwiązanie:

Na początku zapiszmy funkcję w innej postaci

$$f(x) = 2\sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \right) \right)^3 + 11.$$

Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{3} \cdot 3 \cos^2 \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \left(\cos \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \right)' = \\ &= -6\sqrt{3} \cos^2 \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \sin \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \left(\frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \right)' = \\ &= -6\sqrt{3} \cos^2 \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \sin \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \frac{(2x^2+5x-7)'(e^x+6) - (2x^2+5x-7)(e^x+6)'}{(e^x+6)^2} = \\ &= -6\sqrt{3} \cos^2 \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \sin \frac{2x^2+5x-7}{e^x+6} \cdot \frac{(4x+5)(e^x+6) - (2x^2+5x-7)e^x}{(e^x+6)^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Obliczyć pochodną funkcji złożonej

$$a) \quad y = 8e^{2x},$$

$$b) \quad y = \left(\frac{1}{4} + x\right)^4,$$

$$c) \quad y = (x - 3)^{11},$$

$$d) \quad y = 2 \sin \frac{x}{2} + 2,$$

$$e) \quad y = 4 \sin^3 5x,$$

$$f) \quad y = 2x + \sin 2x,$$

$$g) \quad y = 6 \sin(2x^2 - 7) + 3 \cos 2x,$$

$$h) \quad y = 6 - e^{\frac{1}{x}},$$

$$i) \quad y = 2x - e^{2x},$$

$$j) \quad y = 2e^{\sin x},$$

$$k) \quad y = \sqrt{\frac{x^2 - 9x + 1}{3 - x^2}},$$

$$l) \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 3x}},$$

$$m) \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{x}{3},$$

$$n) \quad y = 2 \sin^2 5x,$$

$$o) \quad y = e^x + e^{-x},$$

$$p) \quad y = (x^2 + 3) \cos 3x,$$

$$r) \quad y = 2 \ln(4x - 3) - 4x,$$

$$s) \quad y = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$t) \quad y = 2 \cdot 5^{3x} + 5 \cdot 2^{4x},$$

$$u) \quad y = (2x^2 - 3x + 4)^2.$$

Zadanie 4. Obliczyć pochodną funkcji

$$4.1) \quad y = 8 \cdot 3^x \cdot x^3,$$

$$4.2) \quad y = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} + 3,$$

$$4.3) \quad y = (2x^3 - 3x - 1)^7,$$

$$4.4) \quad y = \frac{\ln(7x^2-1)}{x-4},$$

$$4.5) \quad y = \frac{\sqrt{2} \sin 3x^2}{\cos 2x-7},$$

$$4.6) \quad y = 2e^{3 \sin 2x},$$

$$4.7) \quad y = (2\sqrt[5]{x^7} - 3x\sqrt[3]{x})(x-2),$$

$$4.8) \quad y = \frac{\sin 4x^2}{\cos 2x-7},$$

$$4.9) \quad y = 6 \cos^2 \sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$4.10) \quad y = \ln(4x-3) - 3,$$

$$4.11) \quad y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}},$$

$$4.12) \quad y = \frac{1}{e^x-1},$$

$$4.13) \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin 2x},$$

$$4.14) \quad y = 2 \sin \frac{4}{x},$$

$$4.15) \quad y = e^{\cos^2 x},$$

$$4.16) \quad y = \operatorname{tg} \sqrt[4]{x},$$

$$4.17) \quad y = (3x^2 + 1) \operatorname{ctg} 3x^2,$$

$$4.18) \quad y = 3 \ln \frac{5}{x-2},$$

$$4.19) \quad y = \sqrt{x} \cos(\sqrt{x} - 5),$$

$$4.20) \quad y = 3e^{-x^2}.$$

$$4.21) \quad y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},$$

$$4.22) \quad y = \ln(\sin x) - 2,$$

$$4.23) \quad y = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}},$$

$$4.24) \quad y = \frac{\ln(6x^2+1)}{x^3-7},$$

$$4.25) \quad y = \sin(5x+3) - 3,$$

$$4.26) \quad y = \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}},$$

Zadanie 4. Obliczyć pochodną funkcji

$$4.27) \quad y = 5 \cos 2x - \cos^2 x, \quad 4.28) \quad y = (\sqrt{8} \cos x - 8)^4,$$

$$4.29) \quad y = (2x^2 - 3)^5 e^{2x^2-3}, \quad 4.30) \quad y = \sqrt{t} \sqrt{t+1},$$

$$4.31) \quad y = \ln(\sin 2x), \quad 4.32) \quad y = \sqrt{x^3 \sqrt[3]{x^7} \sqrt[5]{x}},$$

$$4.33) \quad y = \sqrt{x \sqrt[3]{x^5} \sqrt[6]{x^7} \sqrt{x}}, \quad 4.34) \quad y = \operatorname{tg}(2x - 3) + 9,$$

$$4.35) \quad y = \sin^3(2x - 7) - 9, \quad 4.36) \quad y = 2 \cos \sqrt{x - 3},$$

$$4.37) \quad y = \frac{\ln(\ln x)}{x}, \quad 4.38) \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$4.39) \quad y = 4(3x \sin x - 2)^3 + 9, \quad 4.40) \quad y = (2 - x) \ln(2 - x).$$

$$4.41) \quad y = 2 \sin^3(3x^3 + 1), \quad 4.42) \quad y = \sqrt{3} \cos^4(\sqrt[3]{x}),$$

$$4.43) \quad y = 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x^2-7}{\sqrt{x}}\right), \quad 4.44) \quad y = \frac{\ln(x-e^x)}{5x},$$

$$4.45) \quad y = 5 \sin\left(\frac{x-5}{2-x^3}\right)^3, \quad 4.46) \quad y = \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2 - \cos \pi},$$

$$4.47) \quad y = (2 - e^{3x} \operatorname{ctg} 2x), \quad 4.48) \quad y = \cos \frac{3-2x^5}{e^x-7},$$

$$4.49) \quad y = \frac{x^3 \cos x^3}{x-1}, \quad 4.50) \quad y = \frac{2-x^2}{\sin x^2},$$

$$4.51) \quad y = 3^{2x-7} \ln(9 - x), \quad 4.52) \quad y = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{3x+1}{8x-5},$$

Zadanie 4. Obliczyć pochodną funkcji

$$4.53) \quad y = 3 \ln \frac{8-x^2}{x^3+4},$$

$$4.54) \quad y = \frac{3e^{-5x+3}}{e^{-2x}+2e^x},$$

$$4.55) \quad y = 2 \sin \left((4x^3 - 7)^2 + 1 \right),$$

$$4.56) \quad y = 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{2-x}{x+2},$$

$$4.57) \quad y = 3 \cos^{-2}(13 - x^4) + \sqrt{2}x,$$

$$4.58) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x-8}{\sin 8x}},$$

$$4.59) \quad y = (\sin^2(x^3 - 1) - 4)(x^3 - 2 \cos 5x), \quad 4.60) \quad y = 3e^{\sin^2 x}.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

$$\begin{aligned} &\text{a) } 2x, \text{ b) } 3x^2, \text{ c) } \frac{\sqrt{x}}{2x}, \text{ d) } -\frac{1}{x^2}, \text{ e) } -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}, \text{ f) } -\frac{2}{x^3}, \text{ g) } 2x + 3, \\ &\text{h) } \frac{\sqrt{x+2}}{2(x+2)}, \text{ i) } \frac{x\sqrt{x^2+5}}{x^2+5}, \text{ j) } \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{2(x^2+x)}, \text{ k) } \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \text{ l) } \frac{\sqrt{x+4}}{2(x+4)}, \\ &\text{m) } 3x^2 + 6x, \text{ n) } -\frac{1}{(x+1)^2}, \text{ o) } -\frac{2x}{(x^2+3)^2}, \text{ p) } -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}, \\ &\text{r) } \frac{x^2-1}{x^2}, \text{ s) } \frac{2x+\sqrt{x}}{2x}, \text{ t) } \frac{2(x^4-1)}{x^3}, \text{ u) } \frac{4x^3-\sqrt{x}}{2x^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.

$$\begin{aligned} &\text{a) } 5x^3 - 18x + 4, \text{ b) } 6(2x - 1)^2, \text{ c) } \frac{5\sqrt{x}}{2x} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{3x}, \\ &\text{d) } -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}x^{-\frac{7}{5}}, \text{ e) } -12x^{-5} - 9x^{-4} + 2x^{-2}, \text{ f) } \frac{x^2+10x-16}{(x+5)^2}, \\ &\text{g) } 10x^4 + 6x^2 + 6x, \text{ h) } 8e^x, \text{ i) } \frac{16x^5+288x^3-4x^2-4x+36}{(x^2+9)^2}, \text{ j) } \frac{5}{x^2} \ln \frac{e}{x}, \\ &\text{k) } 6x^2 - 2x + 1, \text{ l) } x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}, \text{ m) } 30x^2 - 42x + 11, \\ &\text{n) } \cos x - (x + 1) \sin x, \text{ o) } \frac{4-\cos^3 x}{\cos^2 x}, \text{ p) } xe^x(x + 2), \\ &\text{r) } -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}, \text{ s) } \frac{\sin 2x+2x(\cos^2 x+1)}{2 \sin x}, \end{aligned}$$

$$t) -7x^{-\frac{9}{2}}, u) \frac{9(5x^{\frac{1}{3}}+7)-5x^{-\frac{2}{3}}(3x-1)}{9(5x^{\frac{1}{3}}+7)^2}.$$

Zadanie 3.

$$\begin{aligned} & a) 16e^{2x}, b) 4(\frac{1}{4} + x)^3, c) 11(x-3)^{10}, d) \cos \frac{x}{2}, \\ & e) 30 \sin 10x \cos 5x, f) 4 \cos 2x + 2, \\ & g) 24 \cos(2x^2 - 7) - 6 \sin 2x, h) x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, i) -2(e^{2x} - 1), \\ & j) 2 \cos x e^{\sin x}, k) \frac{-9x^2+8x-27}{2\sqrt{x^2-9x+1}\sqrt{(3-x^2)^2}}, l) (2-3x)^{-\frac{4}{3}}, \\ & m) -\frac{\sqrt{3}}{9} \sin \frac{x}{3}, n) 10 \sin 10x, o) e^x - e^{-x}, \\ & p) 2x \cos 3x - 3(x^2 + 3) \sin 3x, r) \frac{-4(4x-5)}{4x-3}, s) \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}, \\ & t) 6 \ln 5 \cdot 5^{3x} + 20 \ln 2 \cdot 2^{4x}, u) 4(4x-3)(2x^2-3x+4)^3. \end{aligned}$$

Zadanie 4.

$$\begin{aligned} & 4.1) 8x^2 3^x (x \ln 3 + 3), 4.2) -2x^{-3} + 5x^{-2}, \\ & 4.3) 21(2x^2 - 1)(2x^3 - 3x - 1)^6, 4.4) \frac{(x-4)-(7x^2-1)\ln(7x^2-1)}{(7x^2-1)(x-4)^2}, \\ & 4.5) \frac{2\sqrt{2}(3x \cos 3x^2 (\cos 2x - 7) + \sin 2x \sin 3x^2)}{(\cos 2x - 7)^2}, 4.6) 12 \cos 2x e^{3 \sin 2x}, \\ & 4.7) (x-2)\left(\frac{14}{5}x^{\frac{2}{5}} - 4x^{\frac{1}{3}}\right)(2x^{\frac{7}{5}} - 3x^{\frac{4}{3}}), \\ & 4.8) 2 \frac{\sin 2x \sin 4x^2 + 4x \cos 4x^2 (\cos 2x - 7)}{(\cos 2x - 7)^2}, 4.9) 3x^{-\frac{1}{3}} \sin 2x^{-\frac{1}{2}}, \\ & 4.10) \frac{4}{4x-3}, 4.11) -\frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^2}, 4.12) -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}, \\ & 4.13) 2 \frac{\sin 2x (\cos x - \sin x) - 4 \cos 2x (\sin x + \cos x)}{4 \sin^2 2x}, 4.14) -8x^{-2} \cos \frac{4}{x}, \\ & 4.15) -\sin 2x e^{\cos^2 x}, 4.16) \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \cos^{-2} x^{\frac{1}{4}}, \\ & 4.17) \frac{6x}{\sin^2 3x^3} (\sin^2 6x^2 - 2(3x^2 + 1)), 4.18) \frac{-3x}{(x-2)^2}, \\ & 4.19) \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \left(\cos(x^{\frac{1}{2}} - 5) - x^{\frac{1}{2}} (\sin(x^{\frac{1}{2}}) - 5) \right), \\ & 4.20) -6xe^{-x}, 4.21) \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}, 4.22) \operatorname{ctg} x, \\ & 4.23) 2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \sin^{-2} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}, 4.24) \frac{3x(4(x^3-7)-(6x^2+1)\ln(6x^2+1))}{(6x^2+1)(x^3-7)^2}, \\ & 4.25) -5 \cos(5x+3), 4.26) \frac{\sqrt{x}(1-e^{\sqrt{x}})}{2x}, 4.27) -9 \sin 2x, 4.28) \\ & -4\sqrt{8} \sin x (\sqrt{8} \cos x - 8)^3, \end{aligned}$$

- 4.29) $8x(x^2 + 1)(2x - 3)^4 e^{2x^2 - 3}$,
 4.30) $\frac{3t+2}{4t^{\frac{1}{2}}(t+1)^{\frac{3}{4}}}$, 4.31) $2\operatorname{ctg} 2x$, 4.32) $\frac{87}{30}x^{\frac{57}{30}}$, 4.33) $\frac{103}{72}x^{\frac{31}{72}}$,
 4.34) $2\cos^{-2}(2x + 3)$, 4.35) $3\sin(2x - 7)\sin 4(2x - 7)$,
 4.36) $-\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$, 4.37) $\frac{1-\ln x \cdot \ln \ln x}{x^2 \ln x}$, 4.38) $\frac{x^2(\ln x + 1) + 1}{x(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$,
 4.39) $324(\sin x + x \cos x)(x \sin x - 1)^2$, 4.40) $-\ln(2 - x) - 1$,
 4.41) $27\sin(3x^3 + 1)\sin 2(3x^3 + 1)$, 4.42) $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin 2x^{\frac{1}{3}}\cos^2 x^{\frac{1}{3}}$,
 4.43) $4\operatorname{tg}\frac{x^2-7}{\sqrt{x}}\cos^{-2}\frac{x^2-7}{\sqrt{x}}\frac{3x^2+7}{2x^{\frac{3}{2}}}$, 4.44) $\frac{5(x(1-e^x)-(x-e^x)\ln(x-e^x))}{25x^2(x-e^x)}$,
 4.45) $\frac{15(x-5)^2(2x^3-15x^2+2)}{(2-x^3)^4}\cos\left(\frac{x-5}{2-x^3}\right)^3$, 4.46) $\frac{x^4\sin\frac{1}{x}-x(x^2+1)\cos\frac{1}{x}}{(x^2+1)^2}$,
 4.47) $\frac{e^{3x}(4-\sin 4x)}{2\sin^2 2x}$, 4.48) $-\frac{e^x(2x^5-10x^4-3)+70x^4}{(e^x-7)^2}\sin\frac{3-2x^5}{e^x-7}$,
 4.49) $\frac{x^2((2x-3)\cos x^3-3x^3(x-1)\sin x^3)}{(x-1)^2}$, 4.50) $\frac{-2x(\sin x^2-(x^2-2)\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$,
 4.51) $\frac{3^{2x-7}}{x-9}(\ln 3(x-9)\ln(9-x)+1)$,
 4.52) $-23\sqrt{3}(8x-5)^{-2}\cos^{-2}\frac{3x+1}{8x-5}$, 4.53) $\frac{-3x(x^3-24x-8)}{(x^2-8)(x^3+4)}$,
 4.54) $\frac{-9e^3(e^{-7x}+4e^{-4x})}{(e^{-2x}+2e^x)^2}$,
 4.55) $48x^2(4x^3-7)\cos((4x^3-7)^2+1)$,
 4.56) $24(x+2)^{-2}\operatorname{ctg}\frac{4-x}{x+2}\sin^{-2}\frac{2-x}{x+2}$,
 4.57) $-24x^3\operatorname{tg}(13-x^4)\cos^{-2}(13-x^4)+\sqrt{2}$, 4.58) $\frac{\sin 8x-8(x-8)\cos 8x}{3(x-8)(\sin^2 8x)^{\frac{5}{3}}}$,
 4.59) $3x^2(x^3-2\cos 5x)\sin 2(x^3-1)+(3x^2+10\sin 5x)$
 $(\sin^2(x^3-1)-4)$, 4.60) $3\sin 2xe^{\sin^2 x}$.

:)

My - matematycy, nie jesteśmy normalnymi członkami społeczeństwa. My próbujemy zrozumieć to, czego normalni ludzie nie umieją zrozumieć.

Marek Bożejko

Rozdział 5: Pochodna funkcji: zastosowania

Ekstremum funkcji

Jeżeli pierwsza pochodna $f'(x)$ dla $x < x_0$ jest ujemna, dla $x = x_0$ jest równa zero, a dla $x > x_0$ jest dodatnia, to funkcja $y = f(x)$ osiąga minimum w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Jeżeli pierwsza pochodna $f'(x)$ dla $x < x_0$ jest dodatnia, dla $x = x_0$ jest równa zero, a dla $x > x_0$ jest ujemna, to funkcja $y = f(x)$ osiąga maksimum w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Monotoniczność funkcji

Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.

Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 1. Wyznaczyć ekstrema oraz przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1}$$

Rozwiązanie:

Funkcja jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

W dalszej kolejności liczymy pochodną tej funkcji

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1\right)' = (x^2 - 2x - 15)e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1}.$$

Szukamy miejsc zerowych pochodnej rozwiązując równanie $(x^2 - 2x - 15)e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1} = 0$.

Wartości wyrażenia $e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 1}$ są dodatnie, a zatem należy rozwiązać równanie $x^2 - 2x - 15 = 0$. Jego pierwiastkami są $x = -3$ oraz $x = 5$. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie wartości x , przy których funkcja może osiągać ekstremum.

Zbadamy teraz znak pochodnej. Pochodna $f'(x)$ jest trójmianem kwadratowym i przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ oraz wartości ujemne, gdy $x \in (-3, 5)$.

Obliczamy wartość funkcji dla $x = -3$ oraz $x = 5$ otrzymując $f(-3) = e^{28}$, $f(5) = e^{-\frac{172}{3}} = \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e^{58}}$.

Stąd w punkcie $(-3, e^{28})$ jest maksimum, a w punkcie $(5, \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e^{58}})$ jest minimum funkcji.

Badamy monotoniczność funkcji, czyli wyznaczamy przedziały, w których pierwsza pochodna przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których pierwsza pochodna przyjmuje wartości ujemne.

Zatem, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$, to funkcja $y = f(x)$ rośnie, gdy $x \in (-3, 5)$, to funkcja $y = f(x)$ maleje.

Zadanie 1. Wyznaczyć ekstrema oraz przedziały monotoniczności funkcji

$$a) \quad y = x^4 - 6x^2 + \frac{1}{4}, \quad b) \quad y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3},$$

$$c) \quad y = \frac{4}{x^2+1}, \quad d) \quad y = x - \frac{9}{x^2},$$

$$e) \quad y = x - \frac{x}{x+1} + 3, \quad f) \quad y = \frac{x^2}{x-1},$$

$$g) \quad y = \frac{4x}{x-1} + x + 7, \quad h) \quad y = \frac{1-x}{x^2+4},$$

$$i) \quad y = 7 - x - \frac{4}{x-5}, \quad j) \quad y = e^x + e^{-x},$$

$$k) \quad y = x^2 e^x, \quad l) \quad y = \frac{2x^2}{x+3},$$

$$m) \quad y = 2x e^{\frac{1}{x}}, \quad n) \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$o) \quad y = \frac{2+\ln x}{2x}, \quad p) \quad y = \frac{-4x}{x^2+4},$$

$$r) \quad y = -x^2 \sqrt{x^2+2}, \quad s) \quad y = \frac{\sqrt{3}x}{\ln x},$$

$$t) \quad y = e^{\frac{1}{1-x^2}}, \quad u) \quad y = e^x - x.$$

Przykład 2. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = \sin x + \cos x + 4$ w podanym przedziale $[0, \pi]$.

Rozwiązanie:

Funkcja przyjmuje wartość największą (najmniejszą) na końcach przedziału lub w punkcie, który może być ekstremum.

Zatem wyznaczamy punkty, w których może istnieć ekstremum funkcji. W tym celu liczymy pierwszą pochodną funkcji i otrzymujemy

$f'(x) = \cos x - \sin x$. Po przyrównaniu do zera mamy $x = k\frac{\pi}{4}$ lub $x = -k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest dowolną różną od zera liczbą całkowitą. $x = \frac{\pi}{4}$ należy do przedziału $[0, \pi]$.

Obliczamy teraz wartości funkcji na końcach przedziału $[0, \pi]$ oraz w punkcie $\frac{\pi}{4}$.

Stąd $f(0) = 5$, $f(\pi) = 3$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 + \sqrt{2}$.

Podsumowując, porównujemy uzyskane wyniki.

W przedziale $[0, \pi]$ funkcja $f(x) = \sin x + \cos x + 4$ osiąga wartość najmniejszą dla $x = \pi$ i wynosi ona 3, natomiast wartość największą osiąga dla $x = \frac{\pi}{4}$ i jest ona równa $4 + \sqrt{2}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji w podanym przedziale

$$a) \quad y = 3x^2 - 2x + 5, \quad \left[\frac{1}{2}, 4\right],$$

$$b) \quad y = 2x^2 + 5x - 3, \quad [-5, 2],$$

$$c) \quad y = \frac{x-2}{x+2}, \quad [0, 5],$$

$$d) \quad y = 2x^3 + 1, \quad [0, 2],$$

$$e) \quad y = \sqrt{x(2-x)}, \quad [3, 5],$$

$$f) \quad y = 5 - 6x^2 - 2x^3, \quad [-3, 1],$$

$$g) \quad y = 3 - x^{\frac{3}{2}}, \quad [-8, 27],$$

$$h) \quad y = 2x^2 \ln x, \quad [1, e],$$

$$i) \quad y = 3x^2 - 10x + 7, \quad [-1, 3],$$

$$j) \quad y = x^4 - 5x^2 + 4, \quad [0, 2],$$

$$k) \quad y = x + \frac{4}{x} - 3, \quad [1, 6],$$

$$l) \quad y = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0, 1],$$

$$m) \quad y = x^4 - 2x - 1, \quad [-1, 2],$$

$$n) \quad y = x \ln x, \quad \left[\frac{1}{e}, e\right],$$

$$o) \quad y = 5 + 7x - 5x^4, \quad \left[\frac{1}{2}, 3\right],$$

$$p) \quad y = x^2 \ln x - 5, \quad [1, 3e],$$

$$r) \quad y = 3 - x \ln x, \quad \left[\frac{1}{10}, e^2\right],$$

$$s) \quad y = \frac{x^3-3}{x+1}, \quad [0, 4],$$

$$t) \quad y = \sin x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right],$$

$$u) \quad y = 2x - \frac{1}{x}, \quad [-4, -1].$$

Punkty przegięcia wykresu funkcji

Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ dla $x < x_0$ jest ujemna, dla $x = x_0$ jest równa zero, a dla $x > x_0$ jest dodatnia, co wyrażamy mówiąc: druga pochodna przy przejściu przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni, to wykres funkcji $y = f(x)$ ma punkt przegięcia w punkcie $x = x_0$.

Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ dla $x < x_0$ jest dodatnia, dla $x = x_0$ jest równa zero, a dla $x > x_0$ jest ujemna, co wyrażamy mówiąc: druga pochodna przy przejściu przez punkt x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny, to wykres funkcji $y = f(x)$ ma punkt przegięcia w punkcie $x = x_0$.

Wypukłość

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w pewnym przedziale dwukrotnie różniczkowalna, a jej druga pochodna przyjmuje w tym przedziale wartości dodatnie, to funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale funkcją wypukłą.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w pewnym przedziale dwukrotnie różniczkowalna, a jej druga pochodna przyjmuje w tym przedziale wartości ujemne, to funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale funkcją wklęsłą.

Przykład 3. Wyznaczyć punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

Rozwiązanie:

Funkcja jest określona dla $x \in \mathbb{R}/\{0\}$. W celu wyznaczenia punktów przegięcia wykresu funkcji, liczymy drugą pochodną funkcji korzystając ze wzorów na pochodną iloczynu i ilorazu dwóch funkcji:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x-1)e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}},$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2-x+1}{x^2} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f''(x) = \left(\frac{(x^2-x+1)'x^2 - (x^2-x+1)(x^2)'}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2-x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)x^2 - (x^2-x+1)2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2-x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)x^2 - (x^2-x+1)2x - (x^2-x+1)}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}.$$

Szukamy miejsc zerowych drugiej pochodnej rozwiązując równanie $-\frac{x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = 0$. Funkcja $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ przyj-

muje wartości dodatnie, zatem równanie jest spełnione, gdy $\frac{x+1}{x^4} = 0$, czyli gdy $x = -1$.

Aby stwierdzić, czy punkt $x = -1$ jest punktem przegięcia należy zbadać znak drugiej pochodnej

$$f''(x) = -\frac{x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}.$$

Jak już nadmieniono, funkcja $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ przyjmuje wartości dodatnie, zaś funkcja $h(x) = x^4$ przyjmuje w zbiorze $\mathbb{R}/\{0\}$ również wartości dodatnie, zatem druga pochodna jest dodatnia, gdy $x \in (-\infty, -1)$ oraz ujemna, gdy $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$. W punkcie $x_0 = -1$ druga pochodna zmienia znak, czyli po obliczeniu $f(-1) = \frac{-2}{e}$ możemy powiedzieć, że punkt $(-1, \frac{-2}{e})$ jest punktem przegięcia.

Wypukłość funkcji:

Gdy $x \in (-\infty, -1)$, to funkcja

$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ jest wypukła,

gdy $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, to funkcja $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ jest wklęsła.

Zadanie 3. Wyznaczyć punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji

$$a) \quad y = \frac{5-x}{2x+3},$$

$$b) \quad y = \frac{3x-1}{x-2},$$

$$c) \quad y = 2x^3 - 15x^2 + 3,$$

$$d) \quad y = x^4 - 6x^2 + \sqrt{5},$$

$$e) \quad y = \frac{x^4}{6} + x^3 + 2x^2 + 2x - 1,$$

$$f) \quad y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 15x + 22,$$

$$g) \quad y = 4x^3 - 27x^2 - 30x + 2,$$

$$h) \quad y = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x - 3,$$

$$i) \quad y = \frac{x^4}{2} + 7x^3 + 36x^2 + 6x + \sqrt{5},$$

$$j) \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 1,$$

$$k) \quad y = (\ln x)^2 - 2 \ln x,$$

$$l) \quad y = xe^{-x} + 5,$$

$$m) \quad y = x^2 \ln x - e,$$

$$n) \quad y = exe^{-x},$$

$$o) \quad y = \frac{1}{\ln x} + \sqrt{e},$$

$$p) \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 3,$$

$$r) \quad y = \frac{2}{e^x - 1},$$

$$s) \quad y = x\sqrt{9 - x^2},$$

$$t) \quad y = x^3e^{-x},$$

$$u) \quad y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}.$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład 4. Wyznaczyć nieznane współczynniki a , b , c , d tak, aby krzywa o równaniu $y = \frac{ax^3+bx^2+c}{x^2-d}$ posiadała asymptotę ukośną $y = 2x + 3$, asymptoty pionowe $x = -4$ i $x = 4$ oraz aby styczna do wykresu funkcji przechodziła przez punkt $(1, -1)$. Napisać równanie tej stycznej.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji $y = \frac{ax^3+bx^2+c}{x^2-d}$ jest zbiór

$\Re/\{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\}$. Proste $x = -4$ i $x = 4$ będą asymptotami pionowymi funkcji, gdy $\sqrt{d} = 4$ oraz $-\sqrt{d} = -4$, czyli gdy $d = 16$.

W celu wyznaczenia asymptoty ukośnej o równaniu $y = 2x + 3$ liczymy dwie granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x(x^2 - 16)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^3 - 16x}$$

Po podzieleniu licznika i mianownika ułamka przez x^3 otrzymujemy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = a$. Współczynnik kierunkowy prostej będącej asymptotą ukośną jest równy 2, a co za tym idzie $a = 2$.

W dalszej kolejności liczymy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + c}{x^2 - 16} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + bx^2 + c - 2x^3 + 32x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + 32x + c}{x^2 - 16}. \end{aligned}$$

Po podzieleniu licznika i mianownika ułamka przez x^2 otrzymujemy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{32}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = b$.

Po porównaniu ze współczynnikiem przesunięcia prostej będącej asymptotą ukośną otrzymujemy, że $b = 3$.

Aby móc narysować styczną do wykresu funkcji $y = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2 - d}$ przechodzącą przez punkt $(1, -1)$, punkt ten musi należeć do wykresu funkcji. A zatem $f(1) = \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + c}{1^2 - 16} = \frac{5+c}{-15}$. Czyli $\frac{5+c}{-15} = -1$. Stąd $c = 10$.

Podsumowując:

szukana krzywa ma postać $y = \frac{2x^3+3x^2-10}{x^2-16}$.

W celu napisania równania stycznej do krzywej $y = \frac{2x^3+3x^2-10}{x^2-16}$ w punkcie $(1, -1)$ liczymy pochodną funkcji korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^3+3x^2-10)'(x^2-16)-(2x^3+3x^2-10)(x^2-16)'}{(x^2-16)^2} = \\ &= \frac{(6x^2+6x)(x^2-16)-(2x^3+3x^2-10)2x}{(x^2-16)^2} = \\ &= \frac{6x^4-96x^2+6x^3-96x-4x^4-6x^3-20x}{(x^2-16)^2} = \frac{2x(x^3-48x-38)}{(x^2-16)^2}. \end{aligned}$$

Następnie obliczamy $f'(1) = \frac{2(1-48-38)}{(1-16)^2} = \frac{34}{45}$.

Ponieważ $f(1) = -1$, więc równanie stycznej ma postać

$$y = -1 + \frac{34}{45}(x-1), \text{ czyli } y = \frac{34}{45}x - \frac{79}{45}.$$

Zadanie 4. Styczna do wykresu funkcji

4.1) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = \sin x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4.2) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = \cos 2x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4.3) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 3x^2 - 2x + 5$ w punkcie $x_0 = 4$.

4.4) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = -5x^3 - 6x^2 + 2x - 4$ w punkcie $x_0 = 0$.

4.5) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 2x^2 - 3$ prostopadłej do prostej $x + y - 7 = 0$.

4.6) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = -8x^3 - 4x + 1$ prostopadłej do prostej $2x - y - 1 = 0$.

4.7) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 5x^2 - 6$ równoległej do prostej $2x - y - 1 = 0$.

4.8) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$,

4.8.1) równoległej do osi ox ,

4.8.2) równoległej do prostej $y = 12x - 1$,

4.8.3) prostopadłej do prostej $y = -\frac{1}{36}x + 1$.

4.9) Wyznacz współrzędne punktu należącego do krzywej $y = x^2 + 2x - 1$ i takiego, że styczna do krzywej w tym punkcie jest

4.9.1) równoległa do osi ox ,

4.9.2) równoległa do prostej $y = 2x + 3$,

4.9.3) prostopadła do prostej $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

4.10) Wyznaczyć nieznane współczynniki tak, aby spełnione były podane własności

4.10.1) współczynniki a , b , c , d tak, aby krzywa o równaniu $y = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ posiadała asymptotę ukośną $y = x + 3$, asymptotę pionową $x = 2$ i aby przechodziła przez punkt $A(0, 2)$,

4.10.2) współczynniki a , b , c , d , e tak, aby krzywa o równaniu $y = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+e}$ posiadała asymptotę ukośną $y = 2x + 3$, asymptoty pionowe $x = -1$ i $x = 1$ i aby przechodziła przez punkty $A(0, -2)$ oraz $B(2, 16)$

.

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $\max(0, \frac{1}{4}), \min(\sqrt{3}, -8\frac{3}{4}), \min(-\sqrt{3}, -8\frac{3}{4}), x \in (\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow x \in (-\infty, \sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- b) $\max(-3, 2), \min(3, 2), x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-3, 0) \cup (0, 3) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- c) $\max(0, 4), x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- d) $\max(-\sqrt[3]{18}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{18}), x \in (-\infty, -\sqrt[3]{18}) \cup (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\sqrt[3]{18}, 0) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- e) $\max(-2, -1), \min(0, 3), x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- f) $\max(0, 0), \min(2, 4), x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (0, 1) \cup (1, 2) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- g) $\max(-1, 8), \min(3, 16), x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-1, 1) \cup (1, 3) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- h) $\max(-1, \frac{1}{2}), \min(3, -\frac{1}{6}), x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-1, 3) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- i) $\max(7, -2), \min(3, 6), x \in (3, 5) \cup (5, 7) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\infty, 3) \cup (7, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- j) $\min(0, 2), x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- k) $\max(-2, 4e^{-2}), \min(0, 0), x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-2, 0) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- l) $\max(-6, -24), \min(0, 0), x \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-6, -3) \cup (-3, 0) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- m) $\min(1, 2e), x \in (1, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f(x) \searrow,$
- n) $\max(e^2, \frac{2}{e}), x \in (-\infty, e^2) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (e^2, \infty)$

$$\Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{o) } \max(\frac{1}{e}, \frac{1}{2}e), x \in (-\infty, \frac{1}{e}) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (\frac{1}{e}, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{p) } \max(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \min(\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}), x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{r) } \max(0, 0), x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{s) } \min(e, \sqrt{3}e), x \in (-\infty, e) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{t) } \max(0, e), x \in (-\infty, e) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \searrow,$$

$$\text{u) } \min(0, 1), x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) \nearrow, x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \searrow.$$

Zadanie 2.

	<i>wart.najmn.</i>	<i>wart.najw.</i>
<i>a</i>	$f(\frac{1}{2}) = 4\frac{3}{4}$	$f(4) = 45$
<i>b</i>	$f(-\frac{5}{4}) = -6\frac{1}{8}$	$f(2) = 15$
<i>c</i>	$f(0) = -1$	$f(5) = \frac{3}{7}$
<i>d</i>	$f(0) = 1$	$f(2) = 17$
<i>e</i>	$f(2) = 0$	$f(1) = 1$
<i>f</i>	$f(-2) = f(1) = -3$	$f(-3) = 5$

	<i>wart.najmn.</i>	<i>wart.najw.</i>
<i>g</i>	$f(27) = -6$	$f(-8) = -1$
<i>h</i>	$f(1) = 0$	$f(e) = 2e^2$
<i>i</i>	$f(\frac{5}{3}) = -\frac{4}{3}$	$f(-1) = 20$
<i>j</i>	$f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = -\frac{9}{4}$	$f(2) = 0$
<i>k</i>	$f(2) = 1$	$f(6) = \frac{11}{3}$
<i>l</i>	$f(0) = -1$	$f(1) = 0$
<i>m</i>	$f(-1) = 2$	$f(2) = 11$
<i>n</i>	$f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$	$f(e) = e$
<i>o</i>	$f(3) = -379$	$f(\sqrt[3]{\frac{7}{20}}) = 5 + \frac{21}{4}\sqrt[3]{\frac{7}{20}}$
<i>p</i>	$f(1) = -5$	$f(3e) = 9e^2 \ln 3e$
<i>r</i>	$f(e^2) = 3 - 2e^2$	$f(\frac{1}{e}) = 3 + \frac{1}{e}$
<i>s</i>	$f(0) = -4$	$f(-2) = f(4) = 12$
<i>t</i>	$f(0) = 0$	$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi+3}{6}$
<i>u</i>	$f(-4) = -\frac{31}{4}$	$f(-1) = -1$

Zadanie 3.

- a) Brak punktów przegięcia, dla każdego x należącego do dziedziny funkcji, jej wykres jest funkcją wypukłą.
- b) Brak punktów przegięcia, gdy $x \in (-\infty, 2)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (2, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- c) Punkt przegięcia $(2, 5, -59, 5)$, gdy $x \in (-\infty, 2, 5)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (2, 5, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- d) Punkt przegięcia $(-1, -5 + \sqrt{5})$, $(1, -5 + \sqrt{5})$, gdy $x \in (-1, 1)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- e) Punkt przegięcia $(-2, -\frac{7}{3})$, $(-1, -\frac{11}{5})$, gdy $x \in (-2, -1)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- f) Punkt przegięcia $(\frac{1}{4}, 18\frac{25}{96})$, gdy $x \in (-\infty, \frac{1}{4})$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (\frac{1}{4}, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- g) Punkt przegięcia $(\frac{9}{4}, -156\frac{5}{8})$, gdy $x \in (-\infty, \frac{9}{4})$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (\frac{9}{4}, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- h) Punkt przegięcia $(1, 2\frac{11}{12})$, $(3, 14\frac{1}{4})$, gdy $x \in (1, 3)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- i) Punkt przegięcia $(3, 571, 5 + \sqrt{5})$, $(4, 1176 + \sqrt{5})$, gdy $x \in (3, 4)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- j) Punkt przegięcia $(-2, -21)$, $(1, \frac{7}{2})$, gdy $x \in (-2, 1)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- k) Punkt przegięcia $(1, 0)$, gdy $x \in (1, \infty)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (0, 1)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- l) Punkt przegięcia $(2, 2e^{-2} + 5)$, gdy $x \in (-\infty, 2)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (2, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.

- m) Punkt przegięcia $(e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{9}{2}} - e)$, gdy $x \in (0, e^{-\frac{3}{2}})$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- n) Punkt przegięcia $(2, \frac{2}{e})$, gdy $x \in (2, \infty)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, 2)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- o) Punkt przegięcia $(e^{-2}, -\frac{1}{2} + \sqrt{e})$, gdy $x \in (e^{-2}, 1)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- p) Brak punktów przegięcia, dla każdego x należącego do dziedziny funkcji, jej wykres jest funkcją wypukłą.
- r) Brak punktów przegięcia, dla każdego x należącego do dziedziny funkcji, jej wykres jest funkcją wypukłą.
- s) Punkt przegięcia $(0, 0)$, gdy $x \in (0, 3)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-3, 0)$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- t) Punkt przegięcia $(0, 0)$, $(3 - \sqrt{3}, (3 - \sqrt{3})^3 e^{3-\sqrt{3}})$, $(3 + \sqrt{3}, (3 + \sqrt{3})^3 e^{-3-\sqrt{3}})$, gdy $x \in (0, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, \infty)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (-\infty, 0) \cup (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$, to $f(x)$ jest wklęsła.
- u) Punkt przegięcia $(2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}, (\sqrt{3} - 1)\sqrt{6 + 4\sqrt{3}})$, gdy $x \in (2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}, \infty)$, to $f(x)$ jest wypukła, gdy $x \in (0, 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3})$, to $f(x)$ jest wklęsła.

Zadanie 4.

$$4.1) y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

$$4.2) y = -2x + \frac{\pi}{2},$$

$$4.3) y = 22x - 43,$$

$$4.4) y = 2x - 4,$$

$$4.5) y = x - \frac{25}{8},$$

$$4.6) y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$4.7) y = 2x + 109,$$

4.8.1) W punkcie $(1, 6) : y = 6$, w punkcie $(2, 5) : y = 5$,

4.8.2) W punkcie $(0, 1) : y = 12x + 1$, w punkcie $(3, 10) : y = 37x - 101$,

4.8.3) W punkcie $(-1, -22) : y = 36x + 14$, w punkcie $(4, 65) : y = 0$,

4.9.1) W punkcie $(-1, -2) : y = -2$,

4.9.2) W punkcie $(0, -1) : y = 2x - 1$,

4.9.3) W punkcie $(1, 2) : y = 6x - 4$,

4.10.1) $y = \frac{x^2+x-4}{x-2}$,

4.10.2) $y = \frac{2x^3+3x^2+x+2}{x-1}$.

:) Czysta matematyka to poezja logicznego myślenia.

Albert Einstein

Rozdział 6: Reguła de l'Hospitala

Wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$

Iloraz funkcji $f(x)$ i $g(x)$ określonych w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Reguła de L'Hospitala

Granica ilorazu dwóch funkcji dążących do zera przy $x \rightarrow a$ i mających pierwsze pochodne w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ jest równa granicy ilorazu pochodnych tych funkcji przy $x \rightarrow a$, o ile granica po prawej stronie wzoru istnieje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Przykład 1. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 7x - 1}{e^{4x} - 1}$.

Rozwiązanie:

W granicy występują dwie funkcje $f(x) = \cos^3 7x - 1$, $g(x) = e^{4x} - 1$. Ponadto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^3 7x - 1) = \cos^3 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Obliczamy pochodne funkcji korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej: $f'(x) = 3 \cos^2 7x (-\sin 7x) \cdot 7$, $g'(x) = e^{4x} \cdot 4$.

Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 7x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-21 \cos^2 7x \sin 7x}{e^{4x}}$$

Obliczamy $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 7x \sin 7x = \cos^2 0 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0$

oraz $\lim_{x \rightarrow 0} e^{4x} = e^0 = 1$.

$$\text{Zatem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 7x - 1}{e^{4x} - 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Zadanie 1. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{3 \sin x},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 + x^2}{x^2 \sin x},$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x},$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{3 \ln x},$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x^3 - 67x},$$

$$h) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8 \ln(\sqrt{x})}{x - 1},$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{17^x - 123^x}{9x},$$

$$j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2},$$

$$k) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x},$$

$$l) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos 2x},$$

$$m) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 4x} - 1},$$

$$n) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a},$$

$$o) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{11} x},$$

$$p) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\sin 2x},$$

$$r) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x + 12}{x^3 + 27},$$

$$s) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{\sqrt{5x} - 5},$$

$$t) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1},$$

$$u) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$

Iloraz funkcji $f(x)$ i $g(x)$ określonych w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci

$$\frac{\infty}{\infty}, \text{ jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Reguła de L'Hospitala przybiera ma taką samą postać jak w przypadku wyrażenia nieoznaczonego postaci $\frac{0}{0}$.

Przykład 2. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{5x^3 + 1}$.

Rozwiązanie:

W zadaniu mamy $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 5x^3 + 1$.

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x^2) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 + 1) = \infty.$$

Obliczamy pochodne funkcji korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$f'(x) = 2 \ln x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{4 \ln x}{x}, \quad g'(x) = 15x^2.$$

Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{5x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \ln x}{x}}{15x^2} = \frac{4}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

Obliczamy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty.$$

Ponieważ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ oraz $(x^3)' = 3x^2$ stosując ponownie regułę de L'Hospitala i mamy

$$\frac{4}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = \frac{4}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{4}{45} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6}{e^x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x^5 + 9},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}, \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\ln x},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(\cos x)}, \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2}{1 - x^2} + 7^{\frac{1}{x}} \right), \quad h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{9x - 1},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5^x}{1 + 5^{x+1}}, \quad j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 3^x}{4 + 3^{x+1}},$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 8}, \quad l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2x+3} - 5}{4^{x+1} + 3},$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + 3 \ln \sin x}, \quad n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^{-1}}{2 \operatorname{ctg} 4x},$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 3x}, \quad p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{(x + 1)^2},$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad s) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)},$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad u) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln x}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci $\infty \cdot 0$

Iloczyn funkcji $f(x)$ i $g(x)$ określonych w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\infty \cdot 0$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ i jednocześnie $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Wówczas oczywiście $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ i stosując przekształcenie

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

otrzymujemy iloraz funkcji $g(x)$ przez $\frac{1}{f(x)}$, który w punkcie $x = a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$. Reguła de L'Hospitala przybiera taką samą postać jak w przypadku wyrażenia nieoznaczonego postaci $\frac{0}{0}$.

Analogicznie, możemy zastosować przekształcenie

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

otrzymujemy iloraz funkcji $f(x)$ przez $\frac{1}{g(x)}$, który w punkcie $x = a$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Reguła de L'Hospitala przybiera taką samą postać jak w przypadku wyrażenia nieoznaczonego postaci $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład 3. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \left(\frac{3x}{x^2 - 1} + 1 \right)$.

Rozwiązanie:

Mamy $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{3x}{x^2 - 1} + 1$.

Ponadto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x}{x^2 - 1} + 1 \right) = \infty$.

Stosujemy przekształcenie i mamy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \left(\frac{3x}{x^2 - 1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{1}{\frac{3x}{x^2 - 1} + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{1}{\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 1}}.$$

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 1} = 0$. Korzystamy zatem z reguły de L'Hospitala dla wyrażenia nieoznaczonego postaci $\frac{0}{0}$.

W kolejnym kroku obliczamy pochodne

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 + 3x - 1) - (x^2 - 1)(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 1)^2} = \frac{3(x^2 + 1)}{(x^2 + 3x - 1)^2}.$$

Stosując regułę de L'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \left(\frac{3x}{x^2 - 1} + 1 \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 1)^2}{(x^2 + 1)x} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}, \text{ po podstawieniu za } x \text{ liczby } 1.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci $0 \cdot \infty$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{5}x^2 \ln x, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{5x}) \operatorname{ctg} x,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (3 \cos x - 3 + x^2)x^{-2}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right), \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad h) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x,$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 e^{-x}, \quad j) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right),$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), \quad l) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}, \quad n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2},$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)^{-0,5} \ln x, \quad p) \lim_{x \rightarrow 0} (3x)^{-1} \sin 5x,$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x, \quad s) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x,$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \ln(1 - x), \quad u) \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci $\infty - \infty$

Jeżeli $f(x) \rightarrow \infty$ oraz $g(x) \rightarrow \infty$, gdy $x \rightarrow a$ lub $f(x) \rightarrow -\infty$ oraz $g(x) \rightarrow -\infty$, gdy $x \rightarrow a$, to mamy wtedy symbol nieoznaczony postaci $\infty - \infty$.

Jeżeli $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ oraz $g(x) = \frac{1}{v(x)}$, to wtedy przy $x \rightarrow a$ mamy $u(x) \rightarrow 0$, $v(x) \rightarrow 0$ i otrzymujemy

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - u(x)}{u(x)v(x)}.$$

Ostatecznie przy $x \rightarrow a$ wyrażenie przyjmuje postać $\frac{0}{0}$ i możemy stosować poznane metody.

Przykład 4. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x^2 + x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Rozwiązanie:

W przykładzie $f(x) = \frac{1}{4x^2 + x}$, $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$. Przy $x \rightarrow 0$ obie te funkcje dążą do nieskończoności. Czyli w granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x^2 + x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ występuje wyrażenie postaci $\infty - \infty$. Stosując powyższe przekształcenie otrzymujemy, że $u(x) = 4x^2 + x$ i $v(x) = e^x - 1$. Przy $x \rightarrow 0$ obie te funkcje dążą do zera. Odejmując ułamki otrzymujemy wyrażenie $\frac{e^x - 1 - 4x^2 - x}{(4x^2 + x)(e^x - 1)}$, które w punkcie $x = 0$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$. Przy obliczaniu granicy otrzymanego wyrażenia stosujemy dwukrotnie regułę de L'Hospitala:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x^2 + x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - 4x^2 - x}{(4x^2 + x)(e^x - 1)} \right) = \\
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 8x - 1}{(8x + 1)(e^x - 1) + (4x^2 + x)e^x} \right) &= \\
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 8}{8(e^x - 1) + e^x(8x + 1) + e^x(8x + 1) + e^x(4x^2 + x)} \right) &= \\
\frac{-7}{2}, \text{ po podstawieniu za } x \text{ liczby } 0.
\end{aligned}$$

Przykład 5. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{8x^4 - 2x + 1} - \sqrt{8x^4 - 5x - 3} \right).$$

Rozwiązanie:

W przykładzie występuje wyrażenie postaci $\infty - \infty$.

Wyrażenie to należy sprowadzić do symbolu postaci $\frac{0}{0}$.

W tym celu wyrażenie w nawiasie mnożymy i dzielimy przez $\sqrt{8x^4 - 2x + 1} + \sqrt{8x^4 - 5x - 3}$ otrzymując po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{8x^4 - 2x + 1} - \sqrt{8x^4 - 5x - 3} \right) &= \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 2x + 1 - (8x^4 - 5x - 3)}{\sqrt{8x^4 - 2x + 1} + \sqrt{8x^4 - 5x - 3}} &= \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{8x^4 - 2x + 1} + \sqrt{8x^4 - 5x - 3}}.
\end{aligned}$$

Przy $x \rightarrow \infty$ wyrażenia znajdujące się w liczniku i w mianowniku ułamka dążą do nieskończoności i stosujemy regułę de L'Hospitala. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
(3x + 4)' &= 3, \quad (\sqrt{8x^4 - 2x + 1})' = \frac{32x^3 - 2}{2\sqrt{8x^4 - 2x + 1}}, \\
(\sqrt{8x^4 - 5x - 3})' &= \frac{32x^3 - 5}{2\sqrt{8x^4 - 5x - 3}}.
\end{aligned}$$

A zatem powyższa granica jest równa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{32x^3-2}{2\sqrt{8x^4-2x+1}} + \frac{32x^3-5}{2\sqrt{8x^4-5x-3}}}.$$

Wyrażenia występujące w mianowniku ułamka pod pierwiastkiem dzielimy przez x^4 , a licznik dzielimy przez x^2 . Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{32x - \frac{2}{x^2}}{2\sqrt{8 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}} + \frac{32x - \frac{5}{x^2}}{2\sqrt{8 - \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^4}}}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{64x}{2\sqrt{8}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{2}}{16x} = 0. \end{aligned}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci $\infty - \infty$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right),$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right),$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right),$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right),$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{12}{x^2 - 4} \right),$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right),$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 2} \right),$$

$$h) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{6}{1 - x} - \frac{7}{x - 1} \right),$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x} - x \right),$$

$$j) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x),$$

$$k) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right),$$

$$l) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$m) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right),$$

$$n) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 3} \right),$$

$$o) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2 + 1} - x \right),$$

$$p) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x + 1)} \right),$$

$$r) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 4x - 5} - 3x \right),$$

$$s) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right),$$

$$t) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax} \right),$$

$$u) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3x \operatorname{tg} x} \right).$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci 0^0

Jeżeli dane są funkcje $u(x)$ i $v(x)$ określone w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ (może to być sąsiedztwo jednostronne), przy czym $u(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq a$ należących do tego otoczenia, to wyrażenie

$$f(x) = (u(x))^{v(x)}$$

jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci 0^0 , jeżeli przy $x \rightarrow a$ mamy $u(x) \rightarrow 0$ oraz $v(x) \rightarrow 0$.

Ponieważ $u(x) > 0$, więc obie strony powyższego równania możemy zlogarytmować i otrzymamy

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x).$$

Ponadto, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) = A$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A.$$

Ostatecznie przy $x \rightarrow a$ wyrażenie $v(x) \ln u(x)$ przyjmuje jedną z omówionych powyżej postaci i możemy stosować poznane metody.

Przykład 6. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + x)^{\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie:

W zadaniu ograniczamy się do przedziału $[0, \infty)$. Granica przy $x \rightarrow 0$ z obu funkcji wynosi zero, a zatem mamy tutaj wyrażenie postaci 0^0 . Logarytmując funkcję $f(x) = (3x^2 + x)^{\sqrt{x}}$ otrzymujemy $\ln f(x) = \sqrt{x} \ln (3x^2 + x)$. Wyrażenie po prawej stronie równości w punkcie $x = 0$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0 \cdot (-\infty)$, ponieważ jeśli x dąży

do zera, to wartość funkcji $\ln x$ dąży do $-\infty$. Na podstawie przekształcenia

$$\sqrt{x} \ln(3x^2 + x) = \frac{\ln(3x^2 + x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$.

Aby obliczyć granicę tego wyrażenia stosujemy dwukrotnie regułę de L'Hospitala

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x^2 + x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x + 1}{-\frac{1}{2}(3x^2 + x)x^{-\frac{3}{2}}} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(6x + 1)x^{\frac{3}{2}}}{3x^2 + x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^{\frac{3}{2}} + (6x + 1)\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{6x + 1} = \end{aligned}$$

0, ponieważ przy $x \rightarrow 0^+$ licznik ułamka dąży do zera, a mianownik do jedynki.

Zatem ostatecznie $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + x)^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$.

Zadanie 5. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci 0^0

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{2-x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^{-2}}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} (2x)^{x^2},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} x^{3x}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2^x)^{3x}, \quad h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^{2x^{-1}},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2x}, \quad j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{1-\sin x},$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{5x}, \quad l) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sqrt{x}},$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \quad n) \lim_{x \rightarrow 0} (5^x - 1)^{x^2},$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}, \quad p) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2)^x,$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x-1}}, \quad s) \lim_{x \rightarrow 2} (e^2 - e^x)^{x-2},$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1-x}, \quad u) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{1-x}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci ∞^0

Jeżeli dane są funkcje $u(x)$ i $v(x)$ określone w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ (może to być sąsiedztwo jednostronne), przy czym $u(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq a$ należących do tego otoczenia, to wyrażenie

$$f(x) = (u(x))^{v(x)}$$

jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci ∞^0 jeżeli przy $x \rightarrow a$ mamy $u(x) \rightarrow \infty$ oraz $v(x) \rightarrow 0$.

Ponieważ $u(x) > 0$, więc obie strony powyższego równania możemy zlogarytmować i otrzymamy

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x).$$

Ponadto, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) = A$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A.$$

Ostatecznie przy $x \rightarrow a$ wyrażenie $v(x) \ln u(x)$ przyjmuje jedną z omówionych postaci i możemy stosować poznane metody.

Przykład 7. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 5x - 3)^{\frac{1}{x}}$.

Rozwiązanie:

Wyrażenie będące podstawą potęgi dąży do nieskończoności, a wyrażenie będące wykładnikiem potęgi dąży do zera, gdy $x \rightarrow \infty$. Mamy zatem wyrażenie postaci ∞^0 . Logarytmując funkcję

$f(x) = (2x^2 + 5x - 3)^{\frac{1}{x}}$ otrzymujemy

$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x^2 + 5x - 3)$. Wyrażenie po prawej stronie równości przy $x \rightarrow \infty$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0 \cdot (\infty)$. Po przekształceniu $\frac{1}{x} \ln(2x^2 + 5x - 3) = \frac{\ln(2x^2 + 5x - 3)}{x}$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$.

Aby obliczyć granicę tego wyrażenia stosujemy dwukrotnie regułę de L'Hospitala

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x^2 + 5x - 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x^2 + 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{4x + 5} = 0.$$

Ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 5x - 3)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Zadanie 6. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci ∞^0

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x})^{\frac{1}{x-1}},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{x}-1}\right)^{3x}, \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e)^{\frac{e}{x}},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}, \quad h) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^{\frac{1}{x-1}},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} (5^{x+2})^{\frac{1}{x^2}}, \quad j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1},$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + e^x)^{e^{-x}}, \quad l) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x-1},$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}, \quad n) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x},$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)^{\cos x}, \quad p) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + x))^{\frac{1}{x}},$$

$$r) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1)^{e^x}, \quad s) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x}\right)^{2x},$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right)^{e^x - 1}, \quad u) \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞

Jeżeli dane są funkcje $u(x)$ i $v(x)$ określone w pewnym sąsiedztwie punktu $x = a$ (może to być sąsiedztwo jednostronne), przy czym $u(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq a$ należących do tego otoczenia, to wyrażenie

$$f(x) = (u(x))^{v(x)}$$

jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci 1^∞ jeżeli przy $x \rightarrow a$ mamy $u(x) \rightarrow 1$ oraz $v(x) \rightarrow \infty$.

Ponieważ $u(x) > 0$, więc obie strony powyższego równania możemy zlogarytmować i otrzymamy

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x).$$

Ponadto, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) = A$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^A.$$

Ostatecznie przy $x \rightarrow a$ wyrażenie $v(x) \ln u(x)$ przyjmuje jedną z omówionych postaci i możemy stosować poznane metody.

Przykład 8. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$.

Rozwiązanie:

Mamy tutaj wyrażenie postaci 1^∞ . Logarytmując funkcję

$f(x) = (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$ otrzymujemy

$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(e^x - x)$. Wyrażenie po prawej stronie równości przy $x \rightarrow \infty$ jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0 \cdot (\infty)$. Po przekształceniu

$\frac{1}{x} \ln(e^x - x) = \frac{\ln(e^x - x)}{\frac{1}{x}}$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$.

Aby obliczyć granicę tego wyrażenia stosujemy regułę de L'Hospitala

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0$, ponieważ przy $x \rightarrow 0$ wyrażenie w liczniku ułamka dąży do zera, podczas gdy wyrażenie w mianowniku ułamka dąży do jedynki.

Ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0, \text{ czyli } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Zadanie 7. Wyznaczyć granicę funkcji, w której występuje wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{5}{x^2-1}},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 3x)^{\frac{1}{5x}}, \quad d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2x-1} \right)^{\frac{1}{1-x}},$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{x-1}}, \quad f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{5x}}, \quad h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right)^{2x+1},$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} x}, \quad j) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1})^{\frac{1}{x-1}},$$

$$k) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}, \quad l) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}},$$

$$m) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)^x, \quad n) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x-1}},$$

$$o) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 - \sin x)^{\frac{3}{1-\sin x}}, \quad p) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln^2 x},$$

$$r) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^{-2})^{e^x}, \quad s) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sqrt{1-2x},$$

$$t) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right)^x, \quad u) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{2x^{-1}}.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $\frac{2}{3}$, b) 1, c) $\frac{1}{6}$, d) 0, e) 0, f) $\frac{5}{3}$, g) $-\frac{1}{67}$, h) 4, i) $\frac{\ln 17 - \ln 123}{9}$,
 j) $\frac{4}{3}$, k) $\frac{1}{2}$, l) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, m) $\frac{1}{2}$, n) $-\frac{1}{2}$, o) $\frac{1}{\sqrt{11}}$, p) $-\frac{1}{2}$, r) $\frac{1}{12}$,
 s) -20, t) -1, u) 0.

Zadanie 2.

- a) 0, b) ∞ , c) 0, d) ∞ , e) $-\infty$, f) $\sqrt{5}$, g) -6, h) $\frac{1}{3}$,
 i) $-\frac{1}{5}$, j) $-\frac{1}{3}$, k) 0, l) 1, m) $\frac{1}{3}$, n) 6, o) $-\infty$, p) ∞ , r) 0,
 s) 1, t) 0, u) $\frac{1}{2}$.

Zadanie 3.

- a) 0, b) -5, c) $-\frac{1}{2}$, d) ∞ , e) $\frac{2}{\pi}$, f) 0, g) 2, h) 0, i) 0,
 j) 1, k) $\frac{1}{2}$, l) 0, m) 0, n) $-\frac{6}{\pi}$, o) 0, p) $\frac{5}{3}$, r) -1, s) ∞ ,
 t) 0, u) 0.

Zadanie 4.

- a) $-\frac{1}{2}$, b) 0, c) 0, d) $-\frac{1}{3}$, e) $\frac{3}{4}$, f) 0, g) $\frac{1}{2}$, h) ∞ , i) 3, j) ∞ ,
 k) 1, l) $-\frac{1}{6}$, m) 0, n) 0, o) ∞ , p) $-\frac{1}{2}$, r) $\frac{2}{3}$, s) $-\frac{1}{2}$, t) a , u) $\frac{1}{9}$.

Zadanie 5.

- a) 1, b) 1, c) 1, d) 1, e) 1, f) 1, g) 1, h) e^{-2} , i) 1, j) 1,
 k) 1, l) 1, m) 1, n) 1, o) e , p) 1, r) 0, s) 1, t) 1, u) 1.

Zadanie 6.

- a) 1, b) 1, c) e^3 , d) 1, e) 1, f) 1, g) 1, h) 0, i) 1, j) 1,
 k) 1, l) 1, m) 1, n) 1, o) 1, p) 1, r) 1, s) 1, t) 1, u) 1.

Zadanie 7.

a) $\frac{1}{e}$, b) $e^{\frac{2}{5}}$, c) $e^{\frac{3}{5}}$, d) e^2 , e) e , f) $e^{-\frac{1}{2}}$, g) 1 , h) e^2 , i) 1 ,
j) e , k) e^{-1} , l) e^{-1} , m) 1 , n) e^{-3} , o) e^3 , p) 1 , r) ∞ , s) e^{-2} ,
t) e^{-1} , u) 1 .

:)

Za granicą mówią: "X to dobry matematyk; z pewnością Polak". U nas mówią: "Y to prawdziwy Polak; z pewnością słaby matematyk".

Hugo Steinhaus

Rozdział 7: Całki nieoznaczone

Funkcja pierwotna

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Całka nieoznaczona

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ oznaczoną symbolem $\int f(x)dx$ nazywamy wyrażenie $F(x) + c$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a c jest dowolną stałą.

Podstawowe wzory całkowania

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1, \quad x > 0,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad x \neq 0,$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad \cos x \neq 0,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c, \quad \sin x \neq 0,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad -1 < x < 1,$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + c,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \neq 0.$$

Przykład 1. Obliczyć całkę $\int \sin x \left(3 - \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x \sin x} \right) dx$ korzystając z podstawowych wzorów.

Rozwiązanie:

$$\int \sin x \left(3 - \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x \sin x} \right) dx =$$

wymnażamy wyrażenie w nawiasie przez $\sin x$

$$\int \left(3 \sin x - \sin x \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x \sin x} \right) dx =$$

upraszczamy

$$\int \left(3 \sin x - \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x} \right) dx =$$

stosujemy wzór na całkę z sumy funkcji

$$\int 3 \sin x dx - \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x} dx =$$

korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\int 3 \sin x dx - \int \frac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 4}{x} dx =$$

$$\int 3 \sin x dx - \int \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} - \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{4}{x} \right) dx =$$

wykonujemy działania na potęgach

$$\int 3 \sin x dx - \int \left(x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{x} \right) dx =$$

stosujemy wzór na całkę z sumy dwóch funkcji

$$\int 3 \sin x dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int 2x^{-\frac{2}{3}} dx - \int \frac{4}{x} dx =$$

wyłączamy stałą przed znak całki

$$3 \int \sin x dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 2 \int x^{-\frac{2}{3}} dx - 4 \int \frac{1}{x} dx =$$

korzystamy ze wzorów

$$3(-\cos x) - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - 4 \ln |x| + c =$$

i po uproszczeniu

$$-3 \cos x - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} - \ln x^4 + c, \text{ gdzie } c \text{ jest dowolną stałą.}$$

Zadanie 1. Oblicz całki korzystając z podstawowych wzorów

$$a) \int (2x^3 - 4x^2 + \sqrt{3})dx, \quad b) \int \frac{9 - x^2}{2x + 6}dx,$$

$$c) \int \frac{2x - 7}{3x}dx, \quad d) \int \frac{x^3 + 1}{x + 1}dx,$$

$$e) \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}, \quad f) \int \frac{4(\sqrt{x} - 3)^2}{2x}dx,$$

$$g) \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx, \quad h) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx,$$

$$i) \int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}dx, \quad j) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx,$$

$$k) \int \left(3x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x} \right) dx, \quad l) \int \frac{2 - x}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

$$m) \int \left(\frac{2}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx, \quad n) \int \frac{x\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{2x}dx,$$

$$o) \int \frac{22\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[5]{x^2}}{7x^2\sqrt{x}}dx, \quad p) \int \frac{2x^2 - \sqrt[3]{x^5}}{2\sqrt[4]{x^3}}dx,$$

$$r) \int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx, \quad s) \int \left(\frac{1}{x} - 5x + 3 \right) dx,$$

$$t) \int \frac{2}{\cos^2 x}dx, \quad u) \int \frac{2 - 3\sqrt{3}}{\sin^2 x}dx.$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie

Jeżeli dla $x \in [a, b]$, $g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $g(x) \in [A, B]$ a ponadto funkcja $f(u)$ jest ciągłą w przedziale $[A, B]$, to

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$.

Przykład 2. Obliczyć całkę $\int \frac{16x - 10}{\sqrt[5]{-4x^2 + 5x - 3}} dx$ korzystając z metody przez podstawienie.

Rozwiązanie:

W pierwszym kroku zauważmy, że

$$\int \frac{16x - 10}{\sqrt[5]{-4x^2 + 5x - 3}} dx = \int \frac{-2(8x + 5)}{\sqrt[5]{-4x^2 + 5x - 3}} dx.$$

W celu obliczenia tej całki stosujemy podstawienie:

$$t = -4x^2 + 5x - 3 \quad \text{i po zróżniczkowaniu}$$

$$dt = (-8x + 5)dx$$

$$\int \frac{16x - 10}{\sqrt[5]{-4x^2 + 5x - 3}} dx = \int \frac{-2dt}{\sqrt[5]{t}} =$$

korzystamy ze wzorów na potęgi

$$\int (-2)t^{-\frac{1}{5}} dt = -2 \int t^{-\frac{1}{5}} dt =$$

korzystamy ze wzoru na całkę z funkcji potęgowej

$$-2 \frac{t^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = -\frac{5}{2} t^{\frac{4}{5}} + c =$$

wracamy do zmiennej x i ostatecznie otrzymujemy

$$-\frac{5}{2}(-4x^2 + 5x - 3)^{\frac{4}{5}} + c = -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(-4x^2 + 5x - 3)^4} + c.$$

Zadanie 2. Oblicz całki korzystając z metody całkowania przez podstawienie

$$a) \quad \int 2 \cos(5x) dx,$$

$$b) \quad \int \frac{5}{\sqrt{2x-3}} dx,$$

$$c) \quad \int \sqrt[3]{2x-3} dx,$$

$$d) \quad \int (2e^x + 3e^{-x}) dx,$$

$$e) \quad \int 4x^2 \sqrt{x^3 + 8} dx,$$

$$f) \quad \int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx,$$

$$g) \quad \int \frac{2}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx,$$

$$h) \quad \int 8^{1-3x} dx,$$

$$i) \quad \int \frac{2 \cos x}{1 - 3 \sin x} dx,$$

$$j) \quad \int \sin^7 x \cos x dx,$$

$$k) \quad \int \sqrt[3]{3x+2} dx,$$

$$l) \quad \int \frac{\pi - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$m) \quad \int \frac{12x^2 - 14x + 1}{4x^3 - 7x^2 + x - 3} dx,$$

$$n) \quad \int \sin x \cos^3 x dx,$$

$$o) \quad \int \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx,$$

$$p) \quad \int 3 \operatorname{tg} x dx,$$

$$r) \quad \int \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} dx,$$

$$s) \quad \int \frac{\sqrt{7 + \ln x}}{5x} dx,$$

$$t) \quad \int 7^{2x+3} dx,$$

$$u) \quad \int \frac{\sqrt{11}}{x(5 + \ln x)} dx.$$

Wzór na całkowanie przez części

Jeżeli u , v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Przykład 3. Obliczyć całkę $\int (2x^2 + 3x - 1)e^x dx$ korzystając z metody przez części.

Rozwiązanie:

Całkę liczymy przez części

$$u = 2x^2 + 3x - 1 \quad dv = e^x dx$$

stąd

$$du = (4x + 3)dx \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Podstawiamy do powyższego wzoru i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 3x - 1)e^x dx &= \\ (2x^2 + 3x - 1)e^x - \int e^x(4x + 3)dx &= \end{aligned}$$

Otrzymaną powyżej całkę ponownie liczymy przez części

$$u = 4x + 3 \quad dv = e^x dx$$

$$du = 4dx \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Podstawiamy do powyższego wzoru i otrzymujemy

$$(2x^2 + 3x - 1)e^x - ((4x + 3)e^x - \int 4e^x dx) =$$

po wymnożeniu

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x - 1)e^x - (4x + 3)e^x + 4 \int e^x dx &= \\ (2x^2 + 3x - 1)e^x - (4x + 3)e^x + 4e^x + c. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Oblicz całki korzystając z metody całkowania przez części

$$a) \quad \int 2 \ln x dx,$$

$$b) \quad \int \sqrt{x} \ln x dx,$$

$$c) \quad \int \sqrt{3} e^x \sin x dx,$$

$$d) \quad \int 5x \ln x dx,$$

$$e) \quad \int 3x^2 e^x dx,$$

$$f) \quad \int 17 \sin^2 x dx,$$

$$g) \quad \int x \sin x dx,$$

$$h) \quad \int x^3 \cos x dx,$$

$$i) \quad \int (2 + \sqrt{3}) x^2 \sin x dx,$$

$$j) \quad \int 5x e^x dx,$$

$$k) \quad \int 13x \cos x dx,$$

$$l) \quad \int e^x \cos x dx,$$

$$m) \quad \int x^{11} \ln x dx,$$

$$n) \quad \int 2 \operatorname{arctg} x dx,$$

$$o) \quad \int \frac{2 \ln x}{x^3} dx,$$

$$p) \quad \int x^3 e^x dx,$$

$$r) \quad \int (2x + 1)^2 e^x dx,$$

$$s) \quad \int (3x - 1) \cos x dx,$$

$$t) \quad \int \operatorname{arcctg} x dx,$$

$$u) \quad \int (4x + 1)^2 \sin x dx.$$

Zadanie 4. Oblicz całki jedną z poznanych metod

- | | |
|---|--|
| a) $\int \cos x \sqrt[3]{2 + 3 \sin x} \, dx,$ | b) $\int e^x \left(3 + \frac{2e^{-x}}{5x^2} \right) dx,$ |
| c) $\int (3x + 1) \cos(2x + 3x^2) dx,$ | d) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{3x} dx,$ |
| e) $\int \sin x \left(1 - \frac{(x - 5)^2}{x^2 \sin x} \right) dx,$ | f) $\int \frac{\sqrt{2\sqrt{3} - x}}{\sqrt[3]{2\sqrt{3} - x}} dx,$ |
| g) $\int \operatorname{tg} x \left(2 \operatorname{ctg} x - \frac{(2 - x)^2}{x^3 \operatorname{tg} x} \right) dx,$ | h) $\int e^x \left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx,$ |
| i) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx,$ | j) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx,$ |
| k) $\int x \ln(1 + x^2) dx,$ | l) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$ |
| m) $\int (3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} x)^2 dx,$ | n) $\int \frac{4x^3}{3 \cos^2 x^4} dx,$ |
| o) $\int \frac{5}{\cos x} \left(2\sqrt{3} \cos x + \frac{\cos x}{3\sqrt{7}} \right) dx,$ | p) $\int \sqrt{3} x e^{-x^2} dx,$ |
| r) $\int \ln(3x - 7) dx,$ | s) $\int \frac{5x}{\cos^2 x} dx,$ |
| t) $\int \sqrt[5]{(\sin 3x)^4} \cos 3x dx,$ | u) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx.$ |

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \sqrt{3}x + c$, b) $\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$, c) $\frac{2x}{3} - \frac{7}{3} \ln|x| + c$,
 d) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$, e) $x + c$, f) $2x - 24\sqrt{x} + 9 \ln|x| + c$,
 g) $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + c$, h) $x - \cos x + c$, i) $-\operatorname{ctg}x + \cos x + c$,
 j) $-\operatorname{ctg}x + \operatorname{tg}x + c$, k) $\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - 2 \ln|x| + c$, l) $3\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$,
 m) $\arctg x - \arcsin x + c$, n) $\frac{8}{3}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[4]{x} + c$,
 o) $\frac{132}{7\sqrt[6]{x}} + \frac{30}{77\sqrt[10]{x^{11}}} + c$, p) $\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} - \frac{6}{23}\sqrt[12]{x^{23}} + c$, r) $2e^x + \frac{1}{2x^2} + c$,
 s) $\ln|x| - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$, t) $2\operatorname{tg}x + c$, u) $(3\sqrt{3} - 2)\operatorname{ctg}x + c$.

Zadanie 2.

- a) $\frac{2}{5} \sin 5x + c$, b) $5\sqrt{2x-3} + c$, c) $\frac{8}{3}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$,
 d) $2e^x - 3e^{-x} + c$, e) $\frac{8}{9}\sqrt{(x^3+8)^3} + c$, f) $e^{\sqrt{2x+1}} + c$,
 g) $-2 \sin \frac{1}{x} + c$, h) $-\frac{1}{3 \ln 8} 8^{1-3x} + c$, i) $-\frac{2}{3} \ln|1-3 \sin x| + c$,
 j) $\frac{1}{8} \sin^8 x + c$, k) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x+2)^4} + c$,
 l) $\arcsin x - \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$, m) $\ln|4x^3 - 7x^2 + x - 3| + c$,
 n) $-\frac{1}{4} \cos^4 x + c$, o) $\operatorname{tg}^2 x + c$, p) $-\ln|\cos x| + c$,
 r) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{x^2} + c$, s) $\frac{2}{15}\sqrt{(7+\ln x)^3} + c$, t) $\frac{1}{2 \ln 7} 7^{2x+3} + c$,
 u) $\sqrt{11} \ln|5 + \ln x| + c$.

Zadanie 3.

- a) $2(x \ln x - x) + c$, b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + c$,
 c) $\frac{\sqrt{3}e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$, d) $\frac{5x^2}{2} \left(\ln x - \frac{5}{2}\right) + c$,
 e) $3e^x (x^2 - 2x + 2) + c$, f) $\frac{17}{2} (x - \sin x \cos x) + c$,
 g) $-x \cos x + \sin x + c$,
 h) $x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - \cos x + c$,
 i) $(2 + \sqrt{3}) (-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) + c$,
 j) $5e^x (x - 1) + c$,

- k) $13(x \sin x + \cos x) + c$, l) $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$,
 m) $\frac{x^{12}}{12}(\ln x - \frac{1}{12}) + c$, n) $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) + c$,
 o) $-\frac{1}{2x^2}(2 \ln x - 1) + c$, p) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$,
 r) $e^x((2x + 1)^2 - 4(2x + 1) + 8) + c$,
 s) $(3x - 1) \sin x + 3 \cos x + c$, t) $x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$,
 u) $-(4x + 1)^2 \cos x + 8(4x + 1) \sin x + 32 \cos x + c$.

Zadanie 4.

- a) $\frac{1}{4 \sqrt[3]{(2+3 \sin x)^4}} + c$, b) $3e^x - \frac{2}{5x} + c$, c) $\frac{1}{2} \sin(2x + 3x^2) + c$,
 d) $\frac{2}{9} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + c$, e) $-\cos x - x + 10 \ln |x| + \frac{25}{x} + c$, f)
 $-\sqrt[6]{2\sqrt{3}} - x + c$, g) $2x + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} - \ln |x| + c$,
 h) $3e^x + \operatorname{tg} x + c$, i) $\frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1 - x^4} + c$, j) $\frac{1}{5} \ln^5 x + c$,
 k) $\frac{1}{2}(1 + x^2) \ln(1 + x^2) - x + c$, l) $-e^{-\frac{1}{x}} + c$,
 m) $9(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x) - 12 \ln |\cos x| - 4(\operatorname{ctg} x + x) + c$,
 n) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^4 + c$, o) $10\sqrt{3}x + \frac{5x}{3\sqrt{7}} + c$, p) $-\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-x^2} + c$,
 r) $\frac{3x-7}{3}(\ln(3x-7)-1)+c$, s) $5(x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|) + c$,
 t) $\frac{5}{27} \sqrt[5]{\sin 3x^9} + c$, u) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + c$.

:)

Często się mówi - liczby rządzą światem. Pewne jest to: liczby pokazują jak on jest rządzony.

J. W. Goethe

Rozdział 8: Całki z funkcji wymiernych

Przykład 1. Oblicz całkę $\int \frac{x^3 - 4x + 20}{x^2 + x - 6} dx$

Rozwiązanie:

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. W podanej całce stopień wielomianu występującego w liczniku wynosi 3, a stopień wielomianu występującego w mianowniku jest równy 2. Możemy zatem podzielić te wielomiany

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x + 20) : (x^2 + x - 6) = x - 1 \\ \underline{-x^3 - x^2 + 6x} \\ -x^2 + 2x + 20 \\ \underline{x^2 + x - 6} \\ 3x + 14 \end{array}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x + 20}{x^2 + x - 6} dx &= \int \left(x - 1 + \frac{3x + 14}{x^2 + x - 6} \right) dx = \\ &= \int x dx - \int dx + \int \frac{3x + 14}{x^2 + x - 6} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{3x + 14}{x^2 + x - 6} dx. \end{aligned}$$

Pozostaje nam do obliczenia $\int \frac{3x + 14}{x^2 + x - 6} dx$. W tym celu obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = 25$. Wyrażenie w mianowniku ma pierwiastki $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 2$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy założenie, że $x \neq -3$ oraz $x \neq 2$.

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{3x+14}{x^2+x-6} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

Mnożąc obie strony równania przez $(x - 2)(x + 3)$ otrzymujemy

$$3x + 14 \equiv A(x + 3) + B(x - 2), \text{ skąd}$$

$$3x + 14 \equiv (A + B)x + (3A - 2B).$$

Mamy tutaj do czynienia z tożsamością. Poprzez porównanie współczynników znajdujących się przy równych potęgach x po obu stronach tożsamości otrzymujemy

$$A + B = 3 \text{ oraz } 3A - 2B = 14.$$

$$\text{Stąd } A = 4, B = -1.$$

Wracając do funkcji podcałkowej otrzymujemy rozkład

$$\frac{3x+14}{x^2+x-6} \equiv \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x+3}.$$

Całkujemy obie strony tożsamości i po prawej stronie wyłączamy stałe czynniki przed znak całki

$$\int \frac{3x+14}{x^2+x-6} dx = 4 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx =$$

Stosujemy dwukrotnie podstawienie

$$t = x - 2, \text{ stąd } dt = dx \text{ oraz } u = x + 3, \text{ stąd } du = dx.$$

Otrzymujemy zatem

$$4 \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{u} du =$$

$$4 \ln |t| - \ln |u| + c =$$

$$4 \ln |x - 2| - \ln |x + 3| + c =$$

$$\ln \frac{(x-2)^4}{|x+3|} + c.$$

Podsumowując

$$\int \frac{x^3 - 4x + 20}{x^2 + x - 6} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln \frac{(x-2)^4}{|x+3|} + c.$$

Zadanie 1. Oblicz całki ($\Delta > 0$)

$$a) \int \frac{5}{x^2 + 3x - 10} dx,$$

$$b) \int \frac{\sqrt{3}}{3 + 2x - x^2} dx,$$

$$c) \int \frac{1}{2x^2 - 6x + 4} dx,$$

$$d) \int \frac{11x - 1}{3x^2 - 5x - 2} dx$$

$$e) \int \frac{1}{2x^2 + 9x - 5} dx,$$

$$f) \int \frac{2x^3 - 19x^2 + 58x - 42}{x^2 - x - 2} dx,$$

$$g) \int \frac{x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx,$$

$$h) \int \frac{6x + 1}{6x^2 - 5x + 1} dx,$$

$$i) \int \frac{-2x^3 + 3x^2 + 32x + 16}{-x^2 + 2x + 15} dx,$$

$$j) \int \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 + x + 9}{x^2 + x - 6} dx.$$

Przykład 2. Oblicz całkę $\int \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4x + 1} dx$

Rozwiązanie:

W podanej całce stopień wielomianu występującego w liczniku wynosi 4, a stopień wielomianu występującego w mianowniku jest równy 2. Możemy zatem podzielić te wielomiany

$$\begin{array}{r} (4x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5) : (4x^2 - 4x + 1) = x^2 - 1 \\ \underline{-4x^4 + 4x^3 - x^2} \\ -4x^2 - 2x + 5 \\ \underline{4x^2 - 4x + 1} \\ -6x + 6 \end{array}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4x + 1} dx &= \\ \int \left(x^2 - 1 + \frac{-6x + 6}{4x^2 - 4x + 1} \right) dx &= \\ \int x^2 dx - \int dx - 6 \int \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 1} dx &= \\ \frac{x^3}{3} - x - 6 \int \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 1} dx. \end{aligned}$$

Pozostaje nam do obliczenia $\int \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 1} dx$. W tym celu obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego znajdującego się w mianowniku: $\Delta = 0$. Stąd

$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy założenie, że $x \neq \frac{1}{2}$. Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{x-1}{4x^2-4x+1} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2}$$

Mnożąc obie strony równania przez $(2x - 1)^2$ otrzymujemy

$x - 1 \equiv A(2x - 1) + B$, skąd

$$x - 1 \equiv 2Ax + (-A + B).$$

Mamy tutaj do czynienia z tożsamością. Poprzez porównanie współczynników znajdujących się przy równych potęgach x po obu stronach tożsamości otrzymujemy

$$2A = 1 \text{ oraz } -A + B = -1.$$

$$\text{Stąd } A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Wracając do funkcji podcałkowej mamy

$$\frac{x-1}{4x^2-4x+1} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(2x-1)^2}.$$

Całkujemy obie strony tożsamości i po prawej stronie wyłączamy stałe czynniki przed znak całki

$$\int \frac{x-1}{4x^2-4x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x-1)^2} dx =$$

Stosujemy podstawienie

$t = 2x - 1$, stąd $dt = 2dx$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \ln |t| + \frac{1}{4t} + c =$$

$$\frac{1}{4} \ln |2x - 1| - \frac{1}{4(2x-1)} + c.$$

Podsumowując

$$\int \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 6}{4x^2 - 4x + 1} dx = \frac{x^3}{3} - x - \frac{3}{2} \ln |2x - 1| + \frac{3}{2(2x-1)} + c.$$

Zadanie 2. Oblicz całki ($\Delta = 0$)

$$a) \int \frac{9x - 5}{9x^2 - 6x + 1} dx,$$

$$b) \int \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 4} dx,$$

$$c) \int \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 6x + 9} dx,$$

$$d) \int \frac{9x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{9x^2 - 6x + 1} dx,$$

$$e) \int \frac{3x^3 + 5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx,$$

$$f) \int \frac{5x + 10}{4x^2 + 4x + 1} dx,$$

$$g) \int \frac{3x + 1}{x^2 - 10x + 25} dx,$$

$$h) \int \frac{1}{9x^2 - 12x + 4} dx,$$

$$i) \int \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + 4x + 4} dx,$$

$$j) \int \frac{2x^3 + x^2 + 9x + 13}{16 - 8x + x^2} dx.$$

Przykład 3. Oblicz całkę $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 13x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$

Rozwiązanie:

W podanej całce stopień wielomianu występującego w liczniku wynosi 3, a stopień wielomianu występującego w mianowniku jest równy 2. Możemy zatem podzielić te wielomiany

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 4x^2 + 13x - 1) : (x^2 - 2x + 5) = 2x \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 - 10x} \\ 3x - 1 \end{array}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 + 13x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx &= \int \left(2x + \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \\ &= 2 \int x dx + \int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx = \\ &= x^2 + \int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx. \end{aligned}$$

Pozostaje nam do obliczenia $\int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$. W tym celu obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego znajdującego się w mianowniku: $\Delta = -16$.

W dalszej części, aby obliczyć tę całkę, przedstawiamy ją jako sumę dwóch całek. W pierwszym kroku przekształcamy funkcję podcałkową tak, aby wyrażenie w liczniku było pochodną mianownika.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx &= 3 \int \frac{x - \frac{1}{3}}{x^2 - 2x + 5} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{2}{3}}{x^2 - 2x + 5} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx + \frac{3}{2} \int \frac{\frac{4}{3}}{x^2 - 2x + 5} dx = \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}I_1 + 2I_2$, gdzie

$$I_1 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx, \quad I_2 = \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx.$$

Liczymy całkę I_1 . Zauważmy, że funkcja podcałkowa została tak przekształcona, aby wyrażenie znajdujące się w liczniku było pochodną wyrażenia znajdującego się w mianowniku. Stosujemy zatem podstawienie $t = x^2 - 2x + 5$, czyli $dt = (2x - 2)dx$ i stąd $I_1 = \int \frac{dt}{t} dx = \ln |t| + c_1 = \ln |x^2 - 2x + 5| + c_1$.

W kolejnym kroku naszym zadaniem jest obliczenie całki I_2 . W tym celu wyrażenie znajdujące się w mianowniku $x^2 - 2x + 5$ przedstawiamy w postaci kanonicznej $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2+4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} dx. \end{aligned}$$

Stosujemy podstawienie $s = \frac{x-1}{2}$, stąd $ds = \frac{1}{2}dx$.

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{2}{s^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} s + c_2 = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c_2. \end{aligned}$$

Podsumowując

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3-4x^2+13x-1}{x^2-2x+5} dx &= \\ x^2 + \frac{3}{2} \ln |x^2-2x+5| + c_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c_2 &= \\ x^2 + \frac{3}{26} \ln |x^2-2x+5| + \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Oblicz całki ($\Delta < 0$)

$$a) \int \frac{1}{2x^2 - 12x + 27} dx,$$

$$b) \int \frac{x + 1}{2x^2 + 6x + 5} dx,$$

$$c) \int \frac{5x + 2}{x^2 + 2x + 10} dx,$$

$$d) \int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx,$$

$$e) \int \frac{3x^2 - 15x + 2}{-x^2 + 5x - 7} dx,$$

$$f) \int \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 3x + 3} dx,$$

$$g) \int \frac{2x^3 + x^2 + 3x + 8}{x^2 - x + 3} dx,$$

$$h) \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + x + 1} dx,$$

$$i) \int \frac{-x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{-x^2 + x - 1} dx,$$

$$j) \int \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Zadanie 4. Oblicz całki

$$a) \int \frac{x^3 - 5x^2 + 8x + 1}{(x-1)(x-2)^2} dx,$$

$$b) \int \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)} dx,$$

$$c) \int \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 3}{x^4 + 2x^2 + 9} dx,$$

$$d) \int \frac{2x^2 + 4x - 2}{x^3 - 1} dx,$$

$$e) \int \frac{5x^2 + 9x + 10}{x^3 + 8} dx,$$

$$f) \int \frac{3x^3 - 4x^2 - 11x + 12}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx,$$

$$g) \int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2}{x^4 - 1} dx,$$

$$h) \int \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx,$$

$$i) \int \frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 2}{x^4 - 4x^2 - 5} dx,$$

$$j) \int \frac{2x^4 + x^3 + 9x^2 + 6x - 20}{x^4 + 2x^2 - 24} dx.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $-\frac{5}{7} \ln |x+5| + \frac{5}{7} \ln |x-2| + c$,
- b) $-\frac{\sqrt{3}}{4} \ln |3-x| + \frac{\sqrt{3}}{4} \ln |x+1| + c$,
- c) $-\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x-2| + c$,
- d) $\frac{2}{3} \ln |3x+1| + 3 \ln |x-2| + c$,
- e) $-\frac{1}{11} \ln |x+5| + \frac{1}{11} \ln |2x-1| + c$,
- f) $x^2 - 17x + \frac{121}{3} \ln |x+1| + \frac{14}{3} \ln |x-2| + c$,
- g) $\frac{x^3}{3} - x^2 - 7x - 17 \ln |x-2| + c$,
- h) $4 \ln |2x-1| - 3 \ln |3x-1| + c$,
- i) $x^2 - x - \frac{51}{8} \ln |5-x| + \frac{19}{8} \ln |x+3| + c$,
- j) $\frac{x^3}{3} - x + \frac{3}{5} \ln |x+3| + \frac{7}{5} \ln |x-2| + c$.

Zadanie 2.

- a) $\frac{2}{3(3x-1)} + 3 \ln |3x-1| + c$, b) $\frac{2}{x+2} + 3 \ln |x+2| + c$,
- c) $\frac{x^2}{2} + x + c$, d) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + c$, e) $\frac{3x^2}{2} - x - \frac{3}{x+1} + \ln |x+1| + c$,
- f) $-\frac{15}{4(2x+1)} + \frac{5}{4} \ln |2x+1|$, g) $-\frac{16}{x-5} + 3 \ln |x-5| + c$,
- h) $-\frac{1}{3(3x-2)} + c$, i) $\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{x+2} + \ln |x+2| + c$,
- j) $x^2 + 17x - \frac{193}{x-4} + 13 \ln |x-4| + c$.

Zadanie 3.

- a) $\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x-3)}{3} + c$,
- b) $\frac{1}{4} \ln |2x^2 + 6x + 5| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x+3) + c$,
- c) $\frac{5}{2} \ln |x^2 + 2x + 10| - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c$,
- d) $\frac{2}{3} \ln |x^2x + 2| + c$,
- e) $-3x + \frac{38\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x-5)}{3} + c$,
- f) $2x - \frac{10\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x+3)}{3} + c$,
- g) $x^2 + 3x - \frac{2\sqrt{11}}{1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{11}(2x-1)}{11} + c$,

- h) $\frac{x^2}{2} + x + \frac{4\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}(4x+1)}{7} + c,$
 i) $\frac{x^3}{3} + 2x - \ln |x^2 - x + 1| - \frac{8\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + c,$
 j) $x^3 - x + 4 \operatorname{arctg}(x - 1) + c.$

Zadanie 4.

- a) $x + 5 \ln |x - 1| - \frac{5}{x-2} + 10 \ln |x - 2| + c,$
 b) $-\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln |x - 1| + 2 \ln |x + 1| + c,$
 c) $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 3| - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x + 3| + c,$
 d) $\frac{4}{3} \ln |x - 1| + \frac{1}{3} \ln |x^2 + x + 1| + \frac{9}{4} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c,$
 e) $\ln |x + 2| + 2 \ln |x^2 - 2x + 4| + \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x-1)}{3} + c,$
 f) $3x + 2 \ln |x| + \ln |x - 2| + 8 \ln |x - 3| + c,$
 g) $\frac{x^2}{2} + x + \ln |x - 1| + \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + c,$
 h) $2x - \frac{1}{2} \ln |x - 1| - 3 \ln |x + 2| + \frac{19}{2} \ln |x + 3| + c,$
 i) $x + \frac{10+3\sqrt{5}}{60} \ln |x - \sqrt{5}| + \frac{10-3\sqrt{5}}{60} \ln |x + \sqrt{5}| -$
 $\frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c,$
 j) $2x + \frac{17}{10} \ln |x - 2| - \frac{7}{10} \ln |x + 2| + \frac{\sqrt{6}}{30} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}x}{6} + c.$

:)

W matematyce nie ma drogi specjalnie dla królów.

Euklides

Rozdział 9: Całki oznaczone

Związek pomiędzy całką oznaczoną a nieoznaczoną

Jeżeli przez $F(x)$ oznaczmy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $[a, b]$, tzn jeśli $F'(x) = f(x)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

przy czym różnica $F(b) - F(a)$ nie zależy od c .

Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych

Jeżeli $g'(x)$ jest funkcją ciągłą, $g(x)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $[a, b]$, a $f(u)$ funkcją ciągłą w przedziale $[g(a), g(b)]$, to prawdziwy jest następujący wzór określający całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych

Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych przyjmuje postać

$$\int_a^b u dv = [u v]_a^b - \int_a^b v du$$

Podstawowe wzory

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Przykład 1. Oblicz całkę $\int_2^4 \left(\frac{\sqrt{x} - 3x}{5} \right)^2 dx$

Rozwiązanie:

$$\int_2^4 \left(\frac{\sqrt{x} - 3x}{5} \right)^2 dx =$$

stosujemy wzór skróconego mnożenia

$$\int_2^4 \left(\frac{x - 6x\sqrt{x} + 9x^2}{25} \right) dx =$$

wyłączamy stałą przed znak całki

$$\frac{1}{25} \int_2^4 (x - 6x\sqrt{x} + 9x^2) dx =$$

stosujemy wzór na całkę sumy funkcji

$$\frac{1}{25} \left(\int_2^4 x dx + \int_2^4 (-6)x\sqrt{x} dx + \int_2^4 9x^2 dx \right) =$$

wyłączamy stałą przed znak całki

$$\frac{1}{25} \left(\int_2^4 x dx - 6 \int_2^4 x\sqrt{x} dx + 9 \int_2^4 x^2 dx \right) =$$

wykonujemy działania na potęgach

$$\frac{1}{25} \left(\int_2^4 x dx - 6 \int_2^4 x^{\frac{3}{2}} dx + 9 \int_2^4 x^2 dx \right) =$$

korzystamy z podstawowych wzorów na całki

$$\frac{1}{25} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 - 6 \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_2^4 + 9 \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 \right) =$$

wyłączamy stałe

$$\frac{1}{50} (x^2)_2^4 - \frac{12}{125} (x^{\frac{5}{2}})_2^4 + \frac{3}{25} (x^3)_2^4 =$$

korzystamy ze wzoru na całkę oznaczoną

$$\frac{1}{50} (16 - 4) - \frac{12}{125} (4^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}) + \frac{3}{25} (64 - 8) =$$

$$\frac{6}{25} - \frac{12}{125} (32 - \sqrt{2^5}) + \frac{168}{25} = \frac{2}{125} (243 + 24\sqrt{2}).$$

Przykład 2. Oblicz całkę $\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{e^{\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}} dx$.

Rozwiązanie:

Całkę podaną w zadaniu liczymy stosując podstawienie $u = \sqrt{3x-1}$. Stąd $du = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} dx$.

Zmieniamy granice całkowania. Dolna granica jest teraz równa $\sqrt{3 \cdot \frac{5}{3} - 1} = \sqrt{4} = 2$, górna granica jest teraz równa $\sqrt{3 \cdot \frac{10}{3} - 1} = \sqrt{9} = 3$.

Po podstawieniu

$$\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{e^{\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}} dx = \frac{2}{3} \int_2^3 e^u du =$$

korzystamy z podstawowych wzorów na całkowanie

$$\frac{2}{3} [e^u]_2^3 =$$

korzystamy ze wzoru na całkę oznaczoną

$$\frac{2}{3} (e^3 - e^2) = \frac{2}{3} e^2 (e - 1).$$

Przykład 3. Oblicz całkę $\int_3^4 (x-2) \ln(x-2) dx$.

Rozwiązanie:

Całkę liczymy przez części

$$u = \ln(x-2) \quad dv = (x-2) dx$$

$$du = \frac{1}{x-2} dx \quad v = \int (x-2) dx = \frac{x^2}{2} - 2x$$

Stosujemy wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych

$$\begin{aligned} \int_3^4 (x-2) \ln(x-2) dx = \\ \left[\ln(x-2) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \right]_3^4 - \int_3^4 \frac{\frac{x^2}{2} - 2x}{x-2} dx = \end{aligned}$$

wyłączamy stałą

$$\left[\ln(x-2) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \right]_3^4 - \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{x^2 - 4x}{x-2} dx.$$

Obliczmy wartość pierwszego wyrażenia

$$\begin{aligned} & \left[\ln(x-2) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \right]_3^4 = \\ & \ln 2 \left(\frac{4^2}{2} - 8 \right) - \ln 1 \left(\frac{3^2}{2} - 6 \right) = 0. \end{aligned}$$

Pozostaje nam do obliczenia całka $\int_3^4 \frac{x^2 - 4x}{x-2} dx$. Jest to całka wymierna. Dzielimy wielomian znajdujący się w liczniku przez wielomian znajdujący się w mianowniku i otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_3^4 \frac{x^2 - 4x}{x-2} dx = \\ & \int_3^4 \left(x - 2 - \frac{4}{x-2} \right) dx = \\ & \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_3^4 - 4 \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx = \\ & \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 - \left(\frac{3^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - 4 \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx = \end{aligned}$$

Całkę, która pozostała liczymy przez podstawienie $t = x-2$, skąd $dt = dx$. Dolna granica całkowania wynosi 1, a górna 2. Mamy zatem

$$\begin{aligned} & \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 - \left(\frac{3^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - 4 \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \\ & 8 - 8 - \frac{9}{2} + 4 - 4 [\ln |t|]_1^2 = \\ & -\frac{9}{2} + 4 - 4 (\ln 2 - \ln 1) = \frac{3}{2} - 4 \ln 2. \end{aligned}$$

Ostatecznie, podsumowując

$$\int_3^4 (x-2) \ln(x-2) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 4 \ln 2 \right) = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

Zadanie 1. Oblicz całki

$$a) \int_1^2 \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{x} dx, \quad b) \int_1^5 \frac{(\sqrt[4]{x^3} - 2)^2}{2\sqrt{x}} dx,$$

$$c) \int_5^8 (2x^2 + 3) \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 3x - 1} dx, \quad d) \int_0^\pi e^x \sin x dx,$$

$$e) \int_{-2}^4 \frac{8x^3 + 3x^2}{2x^4 + x^3 + 7} dx, \quad f) \int_5^6 (3x - 17)^{15} dx,$$

$$g) \int_3^8 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 11} dx, \quad h) \int_0^1 e^{2x-3} dx,$$

$$i) \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{2x+3}} dx, \quad j) \int_\pi^{2\pi} x^2 \sin x dx,$$

$$k) \int_{-4}^{-2} \frac{x^2}{1 - x^3} dx, \quad l) \int_\pi^{1,5\pi} \cos^2 x dx,$$

$$m) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx, \quad n) \int_{-2\pi}^{-0,5\pi} \sin^2 x dx,$$

$$o) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x} dx, \quad p) \int_1^3 \frac{e^x}{3e^x + 4} dx,$$

$$r) \int_{-\pi}^\pi \sin^5 x dx, \quad s) \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

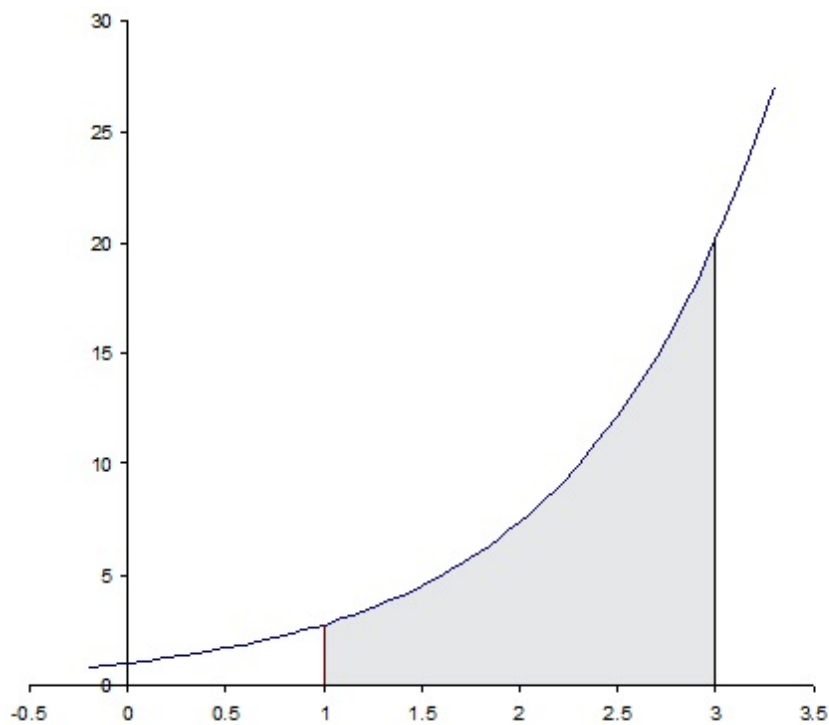
$$t) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx, \quad u) \int_2^5 \frac{2x+5}{x^2+5x+2} dx.$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Jeżeli w przedziale $[a, b]$ funkcja $f(x) \geq 0$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, odcinkiem osi ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ równe jest całce oznaczonej

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Jeżeli w przedziale $[a, b]$ jest $f(x) < 0$, to analogicznie $P = - \int_a^b f(x) dx$.

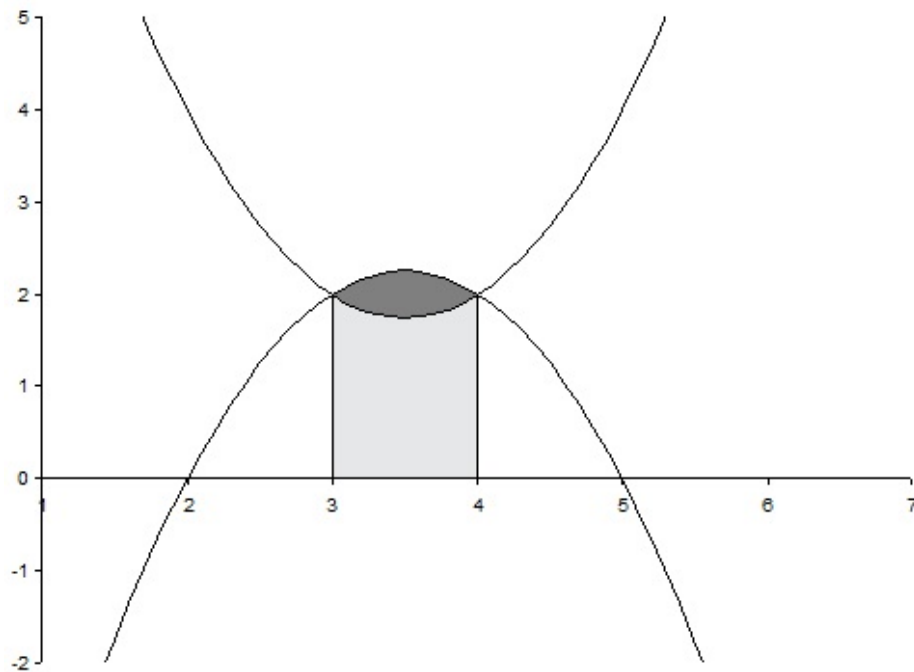


Rysunek 2: Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Przykład 4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi
 $y = -x^2 + 7x - 10$ oraz $y = x^2 - 7x + 14$.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji $y = -x^2 + 7x - 10$ jest parabola, której miejscami zerowymi są $x_1 = 2$ i $x_2 = 5$, wykresem funkcji $y = x^2 - 7x + 14$, jest parabola, która nie ma miejsc zerowych. Punkty przecięcia obu wykresów wyznaczamy z równania $-x^2 + 7x - 10 = x^2 - 7x + 14$ i są to $x = 3$ oraz $x = 4$.



Rysunek 3: Interpretacja graficzna przykładu 4

Z interpretacji całki oznaczonej pole obszaru ograniczonego dwiema parabolami przedstawiamy jako róż-

nicę pomiędzy polem obszaru ograniczonego przez łuk krzywej o równaniu $y = -x^2 + 7x - 10$ a polem obszaru ograniczonego przez łuk krzywej o równaniu $y = x^2 - 7x + 14$.

Zapisujemy to

$$P = \int_3^4 (-x^2 + 7x - 10) dx - \int_3^4 (x^2 - 7x + 14) dx$$

$$P = \int_3^4 (-x^2 + 7x - 10 - (x^2 - 7x + 14)) dx$$

$$P = \int_3^4 (-2x^2 + 14x - 24) dx$$

$$P = \left[-\frac{2x^3}{3} + 7x^2 - 24x \right]_3^4$$

$$P = \left(-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 7 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 7 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 \right)$$

$$P = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 2. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi

a) $y = x^2 - x - 6$ oraz $y = -x^2 + 5x + 14$,

b) $y = 4 - x^2$ oraz $y = x^2 - 2x$,

c) $y^2 = 0,8x$ oraz $x = 5$,

d) $y^2 = 1 - x$ oraz $x = -3$,

e) $y = \ln x$, $y = 0$ oraz $x = 2e$,

f) $xy = 8$ oraz $y = 9 - x$,

g) $y = x^3$, $y = x$ oraz $y = 2x$,

h) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x = -1$, $x = 1$ oraz $y = 0$,

i) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$ oraz $y = 0$,

j) $y^2 - 2x + 4 = 0$ oraz $2y^2 + x - 12 = 0$,

k) $y = \cos x$, $x = 0$ oraz $x = \pi$,

l) $y = \ln x$, $x = e$ oraz $y = 0$,

m) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, $x = 2$ oraz $x = 9$,

n) $y = x^3$ oraz $y^2 = x$,

o) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -3$ oraz $x = 1$,

p) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$ oraz $y = 1$,

r) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$, $x = 4$, $x = 6$ oraz $y = 0$,

s) $y = \frac{x}{1-x}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}, 5$ oraz $y = 0$,

t) $y = \frac{x}{x^4+1}$, $x = -1$, $x = 1$ oraz $y = 0$,

u) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x = \frac{1}{8}$ oraz $y = 27$.

Objętość bryły obrotowej

Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $[a, b]$. Wówczas objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi ox , obliczamy według wzoru

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Przykład 5. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi ox krzywej o równaniu $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ w przedziale $[3, 6]$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ jest przedział $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$.

Objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk krzywej o równaniu $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ obraca się dookoła osi ox w przedziale $[3, 6]$, obliczamy według wzoru

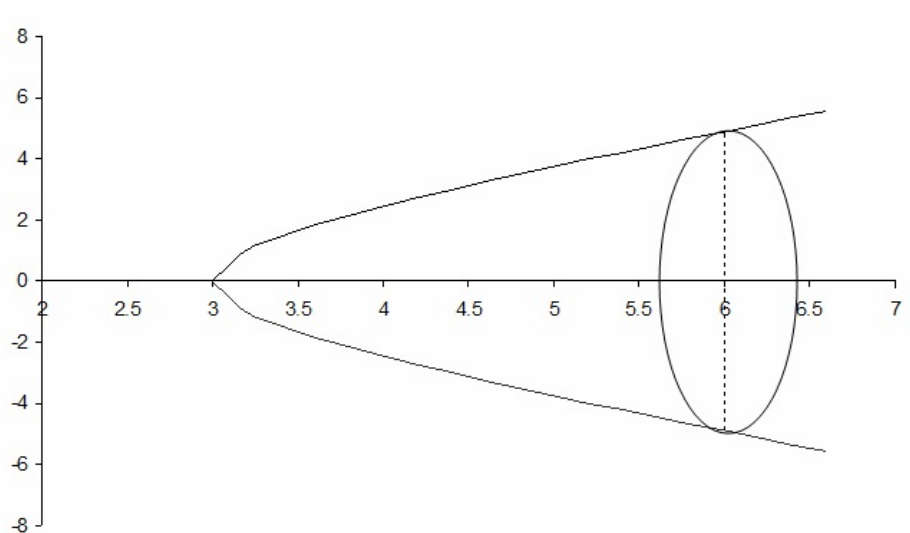
$$V = \pi \int_3^6 \left(\sqrt{x^2 - x - 6} \right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_3^6 (x^2 - x - 6) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^6$$

$$V = \pi \left(\frac{216}{3} - \frac{36}{2} - 36 - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 \right) \right)$$

$$V = \frac{63}{2}\pi.$$



Rysunek 4: Interpretacja graficzna przykładu 5

Zadanie 3. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi ox krzywej o równaniu

a) $y = x^3$, $x = 0$ oraz $x = 2$,

b) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ oraz $x = 3$,

c) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ oraz $x = 4$,

d) $y = 2x^2$, $x = 1$ oraz $x = 2$,

e) $y = x^2 + 3$, $x = 0$ oraz $x = 1$,

f) $y^2 = x$, $x = 2$ oraz $x = 3$,

g) $x^2 + y^2 = 9,$

h) $(x - 2)^2 + y^2 = 4,$

i) $y = \sin x, x = 0$ oraz $x = \pi$

j) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = -1$ oraz $x = 2.$

Objętość bryły obrotowej

Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $[a, b]$. Wówczas objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z odciętymi w końcach łuku obraca się dookoła osi oy , obliczamy według wzoru

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

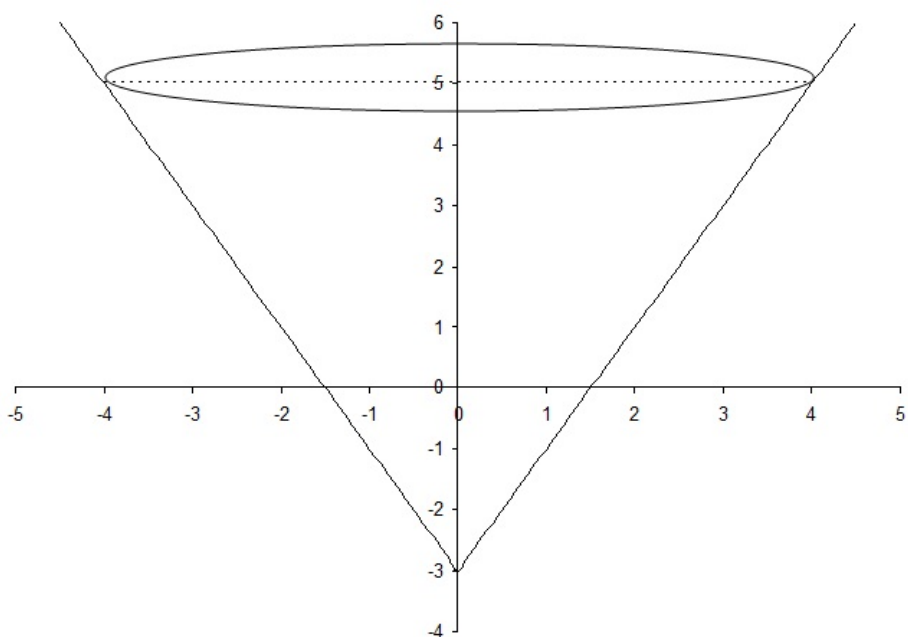
Przykład 6. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi oy krzywej o równaniu $f(x) = |2x| - 3$ w przedziale $[0, 4]$.

Rozwiązanie:

W przedziale $[0, 4]$ podana funkcja ma postać $f(x) = 2x - 3$. Zatem objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk krzywej o równaniu $f(x) = 2x - 3$ obraca się dookoła osi oy w przedziale $[0, 4]$ wyraża się wzorem

$$V = 2\pi \int_0^4 x (2x - 3) dx$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^4 (2x^2 - 3x) dx \\
 V &= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^4 \\
 V &= 2\pi \left(\left(\frac{2}{3}4^3 - \frac{3}{2}4^2 \right) - \left(\frac{2}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 \right) \right) \\
 V &= 2\pi \frac{56}{3} = \frac{112}{3}\pi.
 \end{aligned}$$



Rysunek 5: Interpretacja graficzna przykładu 6

Zadanie 4. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi OY krzywej o równaniu

a) $y = \sqrt[3]{x}$ oraz $y = 3$,

b) $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

c) $y = \ln x, x \in [e, e^2],$

d) $y = e^x, x \in [2, 4],$

e) $y = x^3$ oraz $y = 3x,$

f) $y = \frac{1}{x}, x \in [2, 5],$

g) $y = x^2 - 3$ oraz $y = 5,$

h) $y = \sqrt{x}$ oraz $y = \frac{1}{2}x,$

i) $y = \sin x, x \in [0, \pi],$

j) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x \in [1, 3].$

Pole powierzchni bryły obrotowej

Pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi ox obliczamy według wzoru

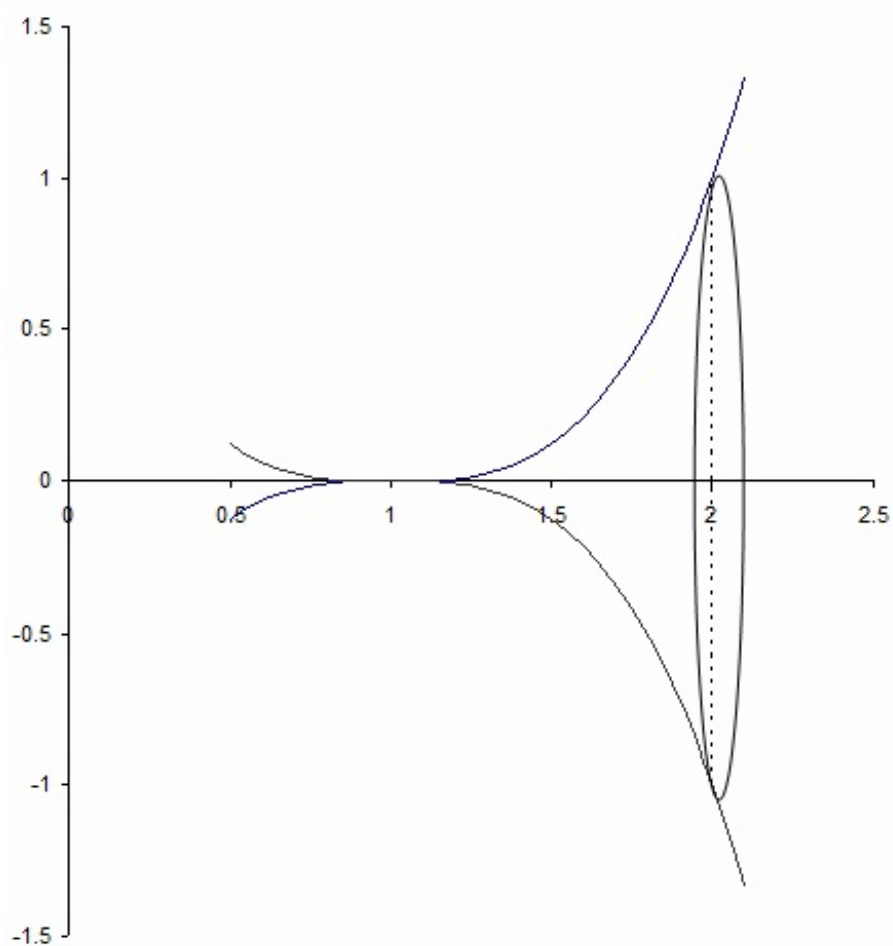
$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

przy założeniu, że funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną.

Przykład 7. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi ox krzywej o równaniu $y = (x - 1)^3$ w przedziale $[1, 2]$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla rozważanej funkcji $\frac{dy}{dx} = 3(x - 1)^2$.



Rysunek 6: Interpretacja graficzna przykładu 7

Zatem pole powierzchni bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk krzywej o równaniu $y = (x - 1)^3$ obraca się dookoła osi oy w przedziale $[1, 2]$ wyraża się wzorem

$$S = 2\pi \int_1^2 (x - 1)^3 \sqrt{1 + (3(x - 1)^2)^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_1^2 (x - 1)^3 \sqrt{1 + 9(x - 1)^4} dx$$

Całkę liczymy przez podstawienie $t = 1 + 9(x - 1)^4$, stąd $dt = 36(x - 1)^3 dx$. Dolna granica całkowania jest równa 1, natomiast górna wynosi 10. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} S &= \pi \frac{2}{36} \int_1^{10} \sqrt{t} dt \\ S &= \pi \frac{1}{18} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \pi \frac{1}{27} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej

a) $y = \sqrt{x + 5}, x \in [-5, 5],$

b) $y = \frac{x^3}{3}, x \in [0, 2],$

c) $y = \sqrt{4x - x^2}, x \in [0, 3],$

d) $y = x^3, x \in [0, 1],$

e) $y^2 = 8x, x \in [0, 3],$

f) $(x - 2)^2 + y^2 = 16, x \in [2, 4],$

g) $y = \sqrt{9 - x^2}, x \in [0, 2],$

h) $y^2 = x + 4, x \in [0, 4],$

i) $y = 2x, x \in [1, 4],$

j) $(x + 3)^2 + y^2 = 25, x \in [-2, 1].$

Długość łuku

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Przykład 8. Oblicz długość łuku krzywej o równaniu $f(x) = (2x + 5)^{\frac{3}{2}}$ w przedziale $[4, 8]$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $[-\frac{5}{2}, \infty)$. Zauważmy, że $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot 2(2x + 5)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2x + 5}$.

Czyli długość łuku krzywej o równaniu

$f(x) = (2x + 5)^{\frac{3}{2}}$ w przedziale $[4, 8]$ wynosi

$$L = \int_4^8 \sqrt{1 + (3\sqrt{2x + 5})^2} dx$$

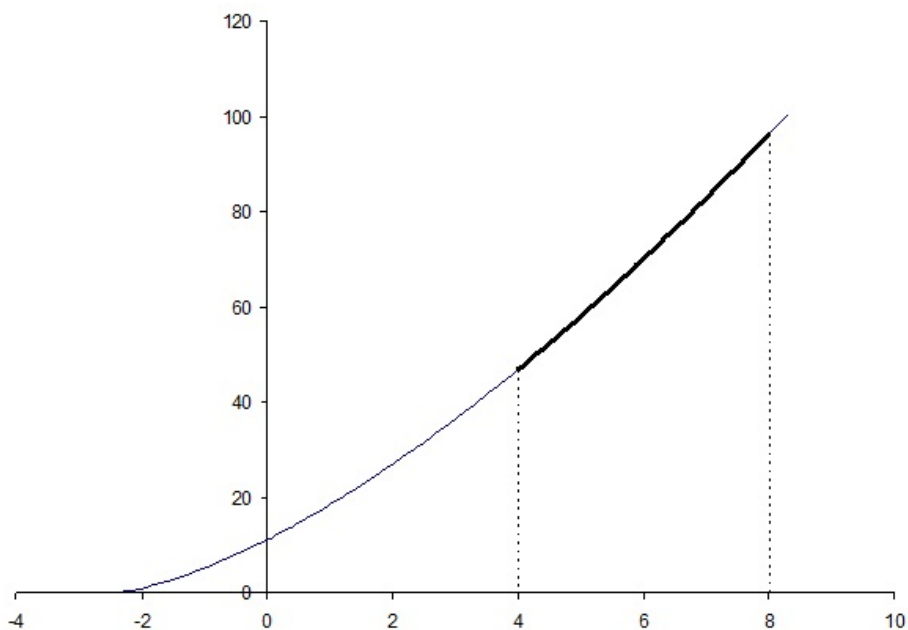
$$L = \int_4^8 \sqrt{1 + 9(2x + 5)} dx$$

$$L = \int_4^8 \sqrt{18x + 46} \, dx$$

Całkę liczymy przez podstawienie $u = 18x + 46$, stąd $du = 18dx$. Zamieniamy granice całkowania: dolna granica jest równa 118, a górna 190. Otrzymujemy

$$L = \frac{1}{18} \int_{118}^{190} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{18} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{118}^{190}$$

$$L = \frac{1}{27} \left(\sqrt{190^3} - 118\sqrt{118^3} \right) = \frac{1}{27} (190\sqrt{190} - 118\sqrt{118}).$$



Rysunek 7: Interpretacja graficzna przykładu 8

Zadanie 6. Oblicz długość łuku krzywej

a) $y = 2x, x \in [1, 5],$

b) $y = -3x + 1, x \in [-4, -1],$

c) $y^2 = (x + 1)^3, x \in [0, 1],$

d) $3y^2 = 4x^3, x \in [0, 1],$

e) $y^2 = (2x + 3)^3, x \in [0, 2],$

f) $y = \sqrt{(2x - 1)^3}, x \in [1, 2],$

g) $y = \sqrt{(-3x + 2)^3}, x \in [-2, 0],$

h) $y = x\sqrt{x}, x \in [0, 4],$

i) $81y^2 = 4x^3, x \in [0, 1],$

j) $16y^2 = 49x^3, x \in [0, 2].$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $9 - 8\sqrt{2} + 4 \ln 2$, b) $3\frac{3}{5} - 8\sqrt[4]{5} + 4\sqrt{5}$, c) $\frac{2}{3} \left((364\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} - (97\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \right)$,
 d) $\frac{1}{2}(e^\pi - 1)$, e) $\ln 18\frac{25}{31}$, f) $-1365\frac{5}{16}$, g) $\ln 4\frac{3}{14}$, h) $\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-3})$,
 i) $e^{\sqrt{5}} - e^{\sqrt{3}}$, j) $-5\pi^2$, k) $-\frac{1}{3} \ln \frac{9}{65}$, l) $\frac{1}{4}\pi$, m) $\frac{2}{15}$, n) $\frac{3}{4}\pi$,
 o) $\ln 3 + \frac{\pi}{12}$, p) $\frac{1}{3}(\ln(3e^3 + 4) - \ln(3e + 4))$, r) 0 ,
 s) $\frac{1}{4}(1 + 2 \ln 2 - \ln 4)$, t) $\sqrt{2}\pi - 4$, u) $\ln 3\frac{1}{4}$.

Zadanie 2.

- a) $114\frac{1}{3}$, b) 9 , c) 8 , d) 16 , e) $2e \ln 2 - 1$, f) $31\frac{1}{2} - 8 \ln 8$, g)
 $\frac{3}{2}$, h) $\frac{\pi}{2}$, i) $\frac{\ln 2 - 1}{4 \ln 2}$, j) $30\frac{2}{3}$, k) 2 , l) 1 , m) $4\frac{1}{2}$, n) $\frac{5}{12}$,
 o) $e - e^{-3}$, p) $\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$, r) $\frac{1}{4}$, s) $\frac{2}{3} + \ln 3 - 2 \ln 2$, t) $\frac{\pi}{4}$,
 u) $\frac{4\sqrt[4]{18-9}}{24}$.

Zadanie 3.

- a) $18\frac{2}{7}\pi$, b) $\frac{2}{3}\pi$, c) 8π , d) $24\frac{4}{5}\pi$, e) $11\frac{1}{5}\pi$, f) $2\frac{1}{2}\pi$, g) 36π ,
 h) $10\frac{2}{3}\pi$, i) $\frac{\pi^2}{2}$, j) $\frac{63}{32 \ln 2}\pi$.

Zadanie 4.

- a) $\frac{54\sqrt{3}}{7}\pi$, b) 2π , c) $\frac{e^2(3e^2-1)}{2}\pi$, d) $2e^2(3e^2-1)\pi$, e) $\frac{24\sqrt{3}}{5}\pi$,
 f) 6π , g) 8π , h) $4\frac{4}{15}\pi$, i) $2\pi^2$, j) $\frac{4}{27 \ln 3} \left(3 + \frac{4}{\ln 3} \right) \pi$.

Zadanie 5.

- a) $\frac{41\sqrt{41}-1}{6}\pi$, b) $\frac{17\sqrt{17}-1}{9}\pi$, c) 12π , d) $\frac{10\sqrt{10}-1}{27}\pi$, e) $\frac{56\sqrt{2}}{3}\pi$, f)
 32π , g) 12π , h) $\frac{3\sqrt{33}-1}{6}\pi$, i) $30\sqrt{5}\pi^2$, j) 30π .

Zadanie 6.

- a) $4\sqrt{5}$, b) $3\sqrt{10}$, c) $\frac{31\sqrt{31}-22\sqrt{22}}{27}$, d) $\frac{14}{9}$, e) $\frac{8(64-7\sqrt{7})}{27}$,

$$\begin{aligned} & \text{f) } \frac{28\sqrt{28}-10\sqrt{10}}{27}, \text{ g) } \frac{406\sqrt{406}-163\sqrt{163}}{729}, \text{ h) } \frac{13\sqrt{13}-8}{27}, \\ & \text{i) } \frac{20\sqrt{10}-54}{9}, \text{ j) } \frac{473\sqrt{946}-256}{2646}. \end{aligned}$$

:)

Matematykiem jest ten, dla kogo wzór:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

jest tak oczywisty, jak dla innych dwa razy dwa równa się cztery.

Thomson Wiliam Kelvin

Rozdział 10: Podstawowe równania różniczkowe

Równania różniczkowe

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdzie y' występuje istotnie, pozostałe argumenty, tzn. x i y mogą występować, ale nie muszą.

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję różniczkowalną $y = \phi(x)$, która spełnia dane równanie dla każdej wartości x z pewnego przedziału.

Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych

nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = p(y)q(x).$$

Jeżeli funkcja $g(y) \neq 0$, to równanie o zmiennych rozdzielonych można zapisać w postaci $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ i obustronnie całkując otrzymujemy całkę ogólną (rozwiązanie) równania różniczkowego

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int f(x)dx.$$

Przykład 1. Rozwiązać równanie $y' + y^2 \sin x = 3x^2 y^2$.

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać to równanie przyjmijmy, że $y = 0$. Wtedy lewa i prawa strona równania są również równe zero i wtedy $y = 0$ jest jednym z możliwych rozwiązań tego równania.

Założmy, że $y \neq 0$. Obie strony równania dzielimy przez y^2 . Mamy wtedy

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \sin x = 3x^2$$

odejmujemy obustronnie $\sin x$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2 - \sin x$$

mnożymy przez dx

$$\frac{1}{y^2} dy = (3x^2 - \sin x) dx$$

całkujemy obustronnie

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int (3x^2 - \sin x) dx$$

obliczamy całki

$$\frac{-1}{y} = x^3 + \cos x + c$$

$$y = \frac{-1}{x^3 + \cos x + c}.$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem szczególnym równania

$$y' + y^2 \sin x = 3x^2 y^2$$

jest $y = 0$. Gdy $y \neq 0$, to rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = \frac{-1}{x^3 + \cos x + c}, \text{ gdzie } c \text{ oznacza dowolną stałą.}$$

Zadanie 1. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$a) \quad xy' - y = 0,$$

$$b) \quad yy' + x = 0,$$

$$c) \quad x^2 dy + (y - 2)dx = 0,$$

$$d) \quad x^2 y' + y = 0,$$

$$e) \quad x + xy + y'(y + xy) = 0,$$

$$f) \quad y' = y,$$

$$g) \quad 2yx^2 dy = (1 + x^2)dx,$$

$$h) \quad 2y'\sqrt{x} = y,$$

$$i) \quad y' = (2y + 1)\operatorname{ctg}x,$$

$$j) \quad x^2 y' + y^2 = 0,$$

$$k) \quad y'(x^2 - 4) = 2xy,$$

$$l) \quad y' + y\operatorname{tg}x = 0,$$

$$m) \quad (x^2 + x)y' = 2y + 1,$$

$$n) \quad y'x^2 = 2y,$$

$$o) \quad 4y' + 10x - 8 = x^3 + x^2 - xy',$$

$$p) \quad y' = 2\sqrt{y}\ln x,$$

$$r) \quad y' + 1 = 2x^3 + 5x^2 - 2xy',$$

$$s) \quad y'e^y = 2x - y',$$

$$t) \quad xy' + 16 = x^2 - 4y',$$

$$u) \quad 2yy' + x = y' + 1,$$

Równaniem różniczkowym jednorodnym
nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Równanie różniczkowe tego typu rozwiązujemy przez podstawienie $u = \frac{y}{x}$.

Stąd $y = ux$ oraz $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

Równanie wyjściowe przyjmuje wtedy postać

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u).$$

Zakładając, że $x \neq 0$ oraz $f(u) - u \neq 0$ otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Przykład 2. Rozwiązać równanie $xy' = 2x + y$.

Rozwiązanie:

Zakładamy, że $x \neq 0$ i obie strony równania dzielimy przez x

$$xy' = 2x + y$$

$$y' = 2 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{y}{x}$$

Podstawiamy $u = \frac{y}{x}$.

Stąd $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Wracamy do równania

$$u + x\frac{du}{dx} = 2 + u$$

$$x\frac{du}{dx} = 2$$

Mnożymy przez dx i dzielimy przez x

$$du = \frac{2}{x}dx$$

obustronnie całkujemy

$$\int du = \int \frac{2}{x}dx$$

$$u = 2 \ln |x| + \ln c$$

korzystamy z własności logarytmów

$$u = \ln cx^2$$

podstawiamy u

$$\frac{y}{x} = \ln cx^2$$

$$y = x \ln x^2 c.$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem ogólnym równania jest $y = x \ln x^2 c$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie różniczkowe jednorodne

$$a) \quad xyy' = x^2 + y^2,$$

$$b) \quad yy' = 2y - x,$$

$$c) \quad xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x,$$

$$d) \quad y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y},$$

$$e) \quad x = y(1 + \ln \frac{y}{x}),$$

$$f) \quad xy' = y^2 + xy,$$

$$g) \quad xy' + 2\sqrt{xy} = y,$$

$$h) \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2,$$

$$i) \quad y^2 + x^2y' = xyy',$$

$$j) \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

$$k) \quad (3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy,$$

$$l) \quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},$$

$$m) \quad xy' \sin \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} = x,$$

$$n) \quad e^{\frac{2y}{x}}(xy' - y) = x,$$

$$o) \quad xy' - y^2 = x\sqrt{x^2 - y^2},$$

$$p) \quad xy' = y + \operatorname{ctg} \frac{y}{x},$$

$$r) \quad (y - 2x)y' + 2y = 0,$$

$$s) \quad xy' = 2y \ln \frac{y}{x},$$

$$t) \quad (4y - x)y' = y + 2x,$$

$$u) \quad 4xyy' = x^2 + 2y^2.$$

Równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, $f(x)$ jest funkcją ciągłą.

Tego typu równanie rozwiązujemy przez podstawienie wprowadzając nową zmienną zależną (funkcję) $u(x)$ daną związkiem $u(x) = ax + by + c$, gdzie y uważamy za funkcję zmiennej x .

Różniczkujemy

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}. \text{ Stąd } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{a}{b}.$$

Następnie przy założeniu, że $bf(u) + a \neq 0$ badamy równanie $\frac{dx}{du} = \frac{1}{bf(u)+a}$, czyli, po wymnożeniu przez du , równanie $dx = \frac{du}{bf(u)+a}$. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych i jego rozwiązanie ma postać

$$\int \frac{du}{bf(u) + a} = \int dx.$$

Przykład 3. Rozwiązać równanie $y' = \frac{3}{(2x+y-1)^4} - 2$.

Rozwiązanie:

W celu rozwiązania równania $y' = \frac{3}{(2x+y-1)^4} - 2$ wykonujemy podstawienie

$u = 2x + y - 1$, a stąd $\frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$.

Następnie $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$.

Wracamy do równania

$$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{3}{u^4} - 2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{u^4}$$

mnożymy przez dx i przez u^4

$$u^4 du = 3 dx$$

obustronnie całkujemy

$$\int u^4 du = 3 \int dx$$

$$\frac{u^5}{5} = 3x + c$$

$$u = \sqrt[5]{3x + c}$$

podstawiamy u

$$2x + y - 1 = \sqrt[5]{3x + c}$$

$$y = \sqrt[5]{3x + c} - 2x + 1$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem ogólnym równania jest

$$y = \sqrt[5]{3x + c} - 2x + 1.$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie różniczkowe typu

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$a) \quad y' = (x + y + 1)^2 - 2x - 2y - 2, \quad b) \quad (x + y)y' = 1,$$

$$c) \quad y' = \frac{1}{x+y} + x + y + 1, \quad d) \quad y' = (3x + y + 2)^2,$$

$$e) \quad y' = (x + y)^2 - 1, \quad f) \quad y' = \frac{3}{(x+y)^3} - 1,$$

$$g) \quad x + 2y + 1 + (2x + 4y + 3) = 0, \quad h) \quad y' = \frac{1}{\cos(x+y-2)} - 1,$$

$$i) \quad y' = \operatorname{tg}(2x + y + 3) - 2, \quad j) \quad y' = \frac{1}{\ln(x+y+1)} - 1,$$

$$k) \quad y' = \sin^2(-x + y + 3), \quad l) \quad y' = (9x + y - 3)^2,$$

$$m) \quad y' = 7x + 2y - 1, \quad n) \quad y' = 2x + 3y + 5,$$

$$o) \quad y' = -(x + 2y + 3)^2 + \frac{8x+16y+3}{4}, \quad p) \quad y' = (-x + 2y + 5)^2,$$

$$r) \quad y' = \frac{1}{4(x-y)} + x - y + 2, \quad s) \quad y' = e^{2x+3y-7} - \frac{2}{3},$$

$$t) \quad y' = \operatorname{tg}(-2x + y + 4) + 2, \quad u) \quad y' = e^{x+y} + 1.$$

Równaniem różniczkowym niejednorodnym

nazywamy równanie typu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Równanie tego typu rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej. W tym celu rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

przyjmując że $q(x) = 0$. Rozwiązaniem tego równania jest $y = ce^{-P(x)}$. Następnie stałą c uzmienniamy, tzn. zastępujemy funkcją $c(x)$ tak dobraną, aby funkcja $y = c(x)e^{-P(x)}$ była całką równania niejednorodnego. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-P(x)} + c(x)e^{-P(x)} \left(-\frac{dP(x)}{dx} \right).$$

Podstawiamy rozwiązanie równania jednorodnego i pochodną do równania niejednorodnego. Mamy

$$\frac{dc}{dx}e^{-P(x)} - c(x)\frac{dP(x)}{dx}e^{-P(x)} + \frac{dP(x)}{dx}c(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

a po redukcji

$$\frac{dc}{dx}e^{-P(x)} = q(x),$$

czyli $\frac{dc}{dx} = q(x)e^{P(x)}$, a stąd $c(x) = Q(x) + c_1$, gdzie $Q(x) = \int q(x)e^{P(x)}dx$. Wyrażenie $c(x)$ podstawiamy do rozwiązania równania jednorodnego i otrzymujemy

$$y = Q(x)e^{-P(x)} + c_1e^{-P(x)}.$$

Przykład 4. Rozwiąż równanie $y' + y = \cos x$.

Jest to równanie niejednorodne. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne $y' + y = 0$ otrzymując

$$\frac{dy}{dx} = -y.$$

Przyjmujemy założenie, że $y \neq 0$ i dzielimy obustronnie przez y . Stąd

$\frac{dy}{y} = -dx$. Całkujemy obustronnie i mamy

$\int \frac{dy}{y} = -dx$, co implikuje

$y = ce^{-x}$. Jest to rozwiązanie równania jednorodnego.

Uzmienniamy stałą c przyjmując, że c jest funkcją x , czyli

$y = c(x)e^{-x}$. Stąd po zróżniczkowaniu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-x} - c(x)e^{-x}.$$

Wstawiamy to do równania $y' + y = \cos x$. Zatem

$\frac{dc}{dx}e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = \cos x$. Po uproszczeniu

$dc = \cos x e^x dx$. Całkujemy obustronnie i mamy

$$\int dc = \int \cos x e^x dx.$$

Całkę z prawej strony równania liczymy przez części, tzn.

$$\begin{array}{ll} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x & v = e^x \end{array}.$$

Stosujemy wzór na całkowanie przez części i otrzymujemy

$\int \cos x e^x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$. Całkę, którą otrzymaliśmy liczymy ponownie przez części. Stąd

$$\begin{array}{ll} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x & v = e^x \end{array}.$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Przenosimy na jedną stronę i wtedy

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x \text{ i po podzieleniu}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x) + c.$$

Wracamy do $\int dc = \int \cos x e^x dx$ i otrzymujemy

$$c(x) = \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x) + c_1. \text{ Następnie } c(x)$$

wstawiamy do rozwiązania równania jednorodnego i

$$y = \frac{1}{2} (\cos x + \sin x) + c_1 e^{-x}.$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie różniczkowe niejednorodne

$$a) \quad y' - \frac{3y}{x} = x,$$

$$b) \quad y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},$$

$$c) \quad y' \cos x - y \sin x = \sin 2x,$$

$$d) \quad y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x,$$

$$e) \quad y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x},$$

$$f) \quad xy' - y = e^x x^2,$$

$$g) \quad y' = y + e^x,$$

$$h) \quad 6y' - y = e^{3x},$$

$$i) \quad y' + 4y = 3e^{7x},$$

$$j) \quad y' + 3y = 2x^2 + 3x - 4,$$

$$k) \quad y' + y = 3 \cos x,$$

$$l) \quad y' = \frac{3y+2x^2}{2},$$

$$m) \quad y' - xy = 5x,$$

$$n) \quad y' - \frac{y}{x} = x \ln x,$$

$$o) \quad y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x,$$

$$p) \quad y' + y \cos x = \sin 2x,$$

$$r) \quad y' + 2xy = xe^{-x^2},$$

$$s) \quad y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1,$$

$$t) \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,$$

$$u) \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x.$$

Odpowiedzi

Zadanie 1.

- a) $y = cx$, b) $x^2 + y^2 = c$, c) $y = ce^{\frac{1}{x}} + 2$, d) $y = ce^{\frac{1}{x}}$,
 e) $x + y = (x + 1)(y + 1) \ln c$, f) $y = ce^x$, g) $y^2 = \frac{x^2 - 1 + cx}{x}$,
 h) $y = ce^{\sqrt{x}}$, i) $y = \frac{c \sin^2 x - 1}{2}$, j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + c$, k) $y = c(x^2 - 4)$,
 l) $y = c \cos x$, m) $y = \frac{cx^2}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}$, n) $y = ce^{-\frac{2}{x}}$,
 o) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + c$, p) $\sqrt{y} = x \ln x - x + c$,
 r) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + c$, s) $y = -\frac{1}{x^3 + \cos x + c}$, t) $y = \frac{x^2}{2} - 4x + c$,
 u) $y^2 - y = x - \frac{x^2}{2} + c$.

Zadanie 2.

- a) $y^2 = 2x^2 \ln |cx|$, b) $y = x + ce^{\frac{x}{y-x}}$,
 c) $\sin \frac{y}{x} + \ln |x| = c$, d) $y^2 = 2x^2 \ln \frac{c}{x}$, e) $y = xe^{cx}$,
 f) $y = \frac{x}{c - \ln |x|}$, g) $\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln |\frac{c}{x}|$, h) $y = 2x + x^3(y + x)c$,
 i) $y = ce^{\frac{y}{x}}$, j) $y = (x^2 + y^2)c$, k) $(x + y)^2 = x^3 e^{-\frac{x}{x+y}} c$,
 l) $y = c \cos x$, m) $\sin^2 \frac{y}{x} = 2 \ln |cx|$, n) $y = \frac{x}{2} \ln(2 \ln(cx))$,
 o) $\sqrt{x^2 - y^2} = x \ln \frac{c}{x}$, p) $y = x \arccos \frac{c}{x}$, r) $y = ce^{-\frac{2x}{y}}$, s)
 $y = cxe^{x^2 + \frac{1}{2}}$, t) $y = x + c\left(\frac{2y-x}{x}\right)^2$, u) $y^2 = \frac{x}{2}(c - x)$.

Zadanie 3.

- a) $y = x - \frac{1}{x+c}$, b) $y = ce^y - x - 1$,
 c) $\frac{1}{x+y+1} + \ln |x + y + 1| = x + c$,
 d) $y = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\sqrt{3}x + c) - 3x - 2$, e) $y = -x - \frac{1}{x+c}$,
 f) $y = \sqrt[4]{12x + c}$, g) $(x + 2y + 1)^2 + 2y = x - 1 + c$,
 h) $y = \arcsin(x + c) - x + 2$, i) $y = \arcsine^{x+c} - 2x - 3$,
 j) $(x + y + 1) \ln(x + y + 1) - y = 2x + c + 1$,
 k) $y = x + \arctg(-x + c) - 3$, l) $y = 3 \operatorname{tg}(9x + c) - 9x + 3$,
 m) $y = \frac{1}{4}(e^{2x+c} - 14x - 5)$, n) $y = \frac{1}{9}(e^{3x+c} - 2) - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$,

- o) $\frac{|2x+4y+1|}{|2x+4y+7|} = e^{-24x+c}$, p) $\frac{|\sqrt{2}(-x+2y+5)-1|}{|\sqrt{2}(-x+2y+5)+1|} = e^{2\sqrt{2}x+c}$,
 r) $\frac{1}{4} \ln(2x-2y+1) + \frac{1}{4(2x-2y+1)} = \frac{1}{4}x + c$,
 s) $y = \frac{1}{3} \ln|-3x+c| - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, t) $y = 2x + \arcsin(e^{-x+c}) - 4$,
 u) $y = -x - \ln|-x+c|$.

Zadanie 4.

- a) $y = -x^2 + cx^3$, b) $y = \frac{c-e^{-x^2}}{2x^2}$, c) $\frac{c-\cos 2x}{2\cos x}$,
 d) $y = -2\cos^2 x + c \cos x$, e) $y = \frac{-1}{\sin x} + c \sin x$,
 f) $y = xe^x + cx$, g) $y = e^{x^2+cx}$, h) $y = \frac{1}{17}e^{3x} + ce^{\frac{x}{6}}$,
 i) $y = \frac{1}{5}e^{11x} + ce^{-4x}$, j) $y = \frac{1}{27}(18x^2 + 15x - 41) + ce^{-3x}$,
 k) $y = \frac{3}{2}(\sin x + \cos x) + ce^{-x}$, l) $y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{16}{27} + ce^{\frac{3}{2}x}$,
 m) $y = -5 + ce^{\frac{1}{2}x^2}$, n) $y = x^2(\ln x - 1) + cx$,
 o) $y = 1 + \frac{\ln(c \operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\cos x}$, p) $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$,
 r) $y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)e^{-x^2}$, s) $y = x^2(1 + ce^{-\frac{1}{x^2}})$,
 t) $y = (x+c)(x^2+1)$, u) $y = \sin x + ce^{-\sin x} - 1$.

:)

Oprócz matematyki nie istnieje żadna niezawodna wiedza z wyjątkiem tej, która wywodzi się z matematyki.

Robert Rekord

Przykładowe kolokwia

Kolokwium 1

Zad 1) Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Zad 2) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$.

Zad 3) Wyznaczyć parametry a i b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x + b & \text{dla } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ była ciągła w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Zad 4) Wyznaczyć punkty przegięcia i wypukłość funkcji $f(x) = (1 + x^2) e^x$.

Zad 5) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3-1}$.

Zad 6) Znaleźć ekstremum funkcji $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Zad 7) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{5-x}} + \frac{\sqrt{5}}{\log(x+6)}$.

Zad 8) Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-1} \right)^{3x-2}$.

Zad 9) Wyznaczyć punkty przecięcia z osiami wykresu funkcji $y = \frac{\sqrt{x+4}-5}{x^2+3}$

Zad 10) Które wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{n+4}-5}{n^2+3}$ są nieujemne?

Kolokwium 2

Zad 1) Oblicz $\int_2^3 (12x - 10) \sin(-3x^2 + 5x - 7) dx$.

Zad 2) Oblicz $\int \sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) dx$.

Zad 3) Oblicz $\int (x+2) \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx$.

Zad 4) Oblicz $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x}$.

Zad 5) Oblicz $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}(x+1)^2}{x} \right) dx$.

Zad 6) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = e^{-x}$, $y = e^{3x}$ oraz $y = \sqrt{e}$.

Zad 7) Rozwiąż równanie $2xy'(y+1) = 3x^2 + 2x + 4$.

Zad 8) Rozwiąż równanie $y' + 2y = 4x$.

Zad 9) Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi ox krzywej o równaniu $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x$ w przedziale $[0, 8]$.

Zad 10) Oblicz pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji o równaniu $y^2 = x - 3$ w przedziale $[3, 6]$.

:)

Matematyk naprawdę dobrze zna jakieś pojęcie, gdy zapomni jego definicję, a mimo to umie je stosować.

Roman Sikorski

Bibliografia

- Banaś J., Wędrychowicz S.: Zbiór zadań z analizy matematycznej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012
- Gewert M., Skoczyła Z.: Analiza matematyczna 1, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002
- Gewert M., Skoczyła Z.: Analiza matematyczna 2, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002
- Ginter J.: Nie bój się pochodnej. WNT, Warszawa 2009
- Kaziuko H., Kaziuko L.: Różniczkowanie i całkowanie funkcji rzeczywistych. Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2014
- Kołodziej W., Żakowski W.: Matematyka, część 2, Analiza matematyczna, WNT, Warszawa 2014
- Korczak W., Trajdos M.: Wektory, pochodne, całki. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013
- Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C.: Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012

- Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C.: Granice i pochodne z CD. Metody rozwiązywania zadań. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013
- Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C.: Całki. Metody rozwiązywania zadań. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013
- Krywicki W., Włodarski L.: Analiza matematyczna w zadaniach, część I. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1987
- Krywicki W., Włodarski L.: Analiza matematyczna w zadaniach, część II. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1987
- Leitner R., Matuszewski W., Rojek Z.: Zadania z matematyki wyższej, część 1, WNT, Warszawa 2014
- Leitner R., Matuszewski W., Rojek Z.: Zadania z matematyki wyższej, część 2, WNT, Warszawa 2014

:)

Celem obliczeń nie są same liczby, lecz ich zrozumienie.

R. W. Hamming

ISBN 978-83-940663-0-7



CXC

BIBLIOGRAFIA