

Numeryczne wyznaczanie wytrzymałości opakowań z tektury falistej

Cz. 1. Założenia teoretyczne w modelowaniu numerycznym opakowań papierowych

Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 1. Theoretical Assumptions in Numerical Modeling of Paperboard Packages

TOMASZ GARBOWSKI, MAREK JARMUSZCZAK

*W niniejszej pracy podjęto tematykę związaną z szeroko rozumianym projektowaniem opakowań z tektury falistej. W praktyce projekt nowego opakowania najpierw pojawia się w formie koncepcji projektanta, opartej na szczegółowych wytycznych zamawiającego. W następnym kroku powstaje jego graficzna forma, po czym prototyp wycinany jest na ploterze. Przygotowany w ten sposób zestaw prototypowych modeli opakowania przechodzi serię testów laboratoryjnych, gdzie sprawdzane są wszystkie wymagane przez zamawiającego wskaźniki wytrzymałościowe. W tak przyjętym łańcuchu projektowym można z powodzeniem umieścić jeszcze jedno ogniwo, które pozwoli zoptymalizować i zautomatyzować proces tworzenia nowego opakowania. Optymalizacji może podlegać zarówno sama konstrukcja, jak i dobór najbardziej odpowiedniego indeksu tektury tak, aby projekt z pewnym zapasem bezpieczeństwa spełniał wszystkie wymagania i jednocześnie był ekonomiczny. W celu uzupełnienia procesu konstruowania nowych prototypów opakowań można wykorzystać zaawansowane techniki numeryczne, oparte np. na metodzie elementów skończonych. W pierwszej części artykułu przedstawiono założenia teoretyczne, niezbędne do zbudowania wiarygodnego modelu numerycznego opakowania z tektury falistej.
Słowa kluczowe: tektura falista, homogenizacja, metoda elementów skończonych*

*In this work the issues related to the wider design of corrugated packaging are discussed. In practice, the design of the new packaging appears first as a concept of designer based on specific ordering guidelines. In the next step, the graphical form is created and then the prototype goes to die. Prepared in this way, a set of prototype models of packages goes through a series of laboratory tests, which check all required moduli. In such a design chain a missing link that will optimize and automate the process of creating a new package can be successfully adopted. Both the structure itself and the selection of the most appropriate index of cardboard may be subjected to optimization, so that the design meets with a chosen safety margin all the requirements and at the same time it's economical. For the purpose of complement of cardboard prototypes design process, one can use advanced computational techniques, based for example on finite element methods. In the first part of the paper the theoretical foundation, necessary to build a reliable numerical model of corrugated board packaging is presented.
Keywords: corrugated board, homogenization, finite element methods*

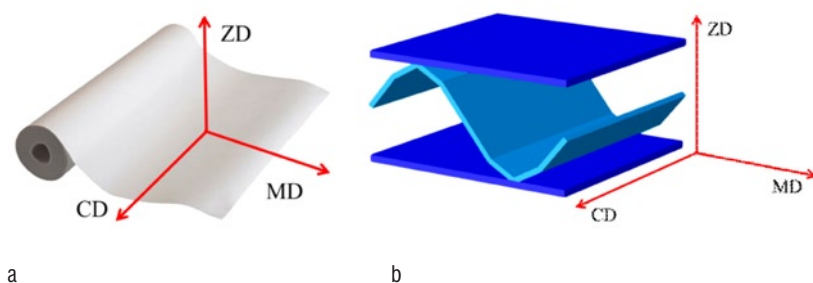
Wprowadzenie

Wyroby wykonane z papieru oraz tektury spotykać można w naszym codziennym życiu prawie na każdym kroku. Materiał ten jest również często wykorzystywany w przemyśle, np. tektura lita jest głównym składnikiem laminatu do produkcji opakowań aseptycznych przeznaczonych do przechowywania soków i produktów mlecznych (1), z tektury falistej produkuje się opakowania transportowe oraz handlowe (tzw. *Shelf Ready Packaging*) (2). Tekturę stosuje się również w przemyśle meblarskim, jako materiał uzupełniający konstrukcje blatów i stołów, czy też płyt szaf i półek (3). W wielu krajach narażonych na oddziaływania trzęsień ziemi możemy spotkać elementy konstrukcji budowlanych lub wręcz całe konstrukcje wykonane ze specjalnie przygotowanej tektury wielowarstwowej (4). Pewien miłośnik tektury i rowerów wykonał nawet całą konstrukcję roweru z tektury (5). Okazuje się, że papier jest jednym z częściej spotykanych materiałów w naszym codziennym życiu, jednak niewielu z nas zastanawia się jak jest wytwarzany, czy jakie ma właściwości fizyczne.

Wiedza na temat właściwości mechanicznych papieru jest bardzo istotna, np. w procesie projektowania konstrukcji opakowań z tektury falistej. W typowych warunkach projektant, opierając się na założeniach technicznych lub fizycznym modelu produktu, tworzy

Dr inż. **T. Garbowski**, Politechnika Poznańska, Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; mgr inż. M. Jarmuszczak, TFP Sp. z o.o., Dzieńmierowo, ul. Katowicka 26, 62-035 Kórnik

¹ Badania finansowane przez projekt „Staże i szkolenia drogą do komercjalizacji wiedzy” realizowany w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki 2007-2013



Rys. 1. Kierunki główne w papierze (a) oraz w tekturze falistej (b)

właściwy projekt konstrukcji opakowania. Podczas procesu projektowania dobierany jest także odpowiedni rodzaj tektury, w celu zapewnienia wymaganych cech funkcjonalnych i wytrzymałościowych opakowania. Dlatego, oprócz wiedzy eksperckiej konstruktora i testów laboratoryjnych, wykorzystuje się badania wskaźników wytrzymałościowych prototypów rozważanej konstrukcji, wykonanych z tektur, możliwie najlepiej przystających do stawianych wymagań projektowych. Po uzyskaniu właściwych rezultatów następuje proces akceptacji konstrukcji przez klienta i dalsze procedury zmierzające do wyprodukowania opakowania. W procesie tym wiedza na temat właściwości mechanicznych papieru wydaje się być kluczowa. Intuicyjnie wiemy, że materiał o lepszych właściwościach wytrzymałościowych jest w stanie przenieść większe obciążenia, dzięki czemu można zaprojektować opakowanie o lepszych parametrach.

Ponieważ papier wykonany jest głównie z włókien roślinnych, a w procesie jego produkcji włókna układają się wzdłuż preferowanego kierunku (zwanego kierunkiem maszynowym, ang. *Machine Direction* lub w skrócie MD), właściwości mechaniczne papieru mają charakter kierunkowy, charakterystyczny dla materiałów ortotropowych. Materiał ortotropowy, jako przypadek szczególny materiału anizotropowego, charakteryzuje się właściwościami sprężystymi i/lub plastycznymi, które są najczęściej różne wzdłuż wzajemnie prostopadłych kierunków (MD, CD – *Cross Direction* oraz ZD – kierunek prostopadły do płaszczyzny tektury) (rys. 1).

To właśnie rodzaj, długość, kształt oraz sposób ułożenia włókien decydują o właściwościach mechanicznych papieru lub tektury, w nieco mniejszym stopniu wpływ na wytrzymałość mają również: stopień zmielenia masy, stopień związania włókien oraz stopień sprasowania. Jednakże w procesie projektowania opakowań z tektury falistej, modelowanie papieru w skali mikro jest bardzo kłopotliwe, dlatego najczęściej papier modeluje się w skali makro, niejako homogenizując jego strukturę włóknistą. W takim podejściu, właściwości mechaniczne poszczególnych włókien, ich wzajemne ułożenie oraz powiązania rozpatrywane są w sposób uśredniony na pewnej reprezentatywnej objętości materiału. W przyjętej skali makro materiał heterogeniczny, jakim bez wątpienia jest papier, rozpatrywany jest jako materiał homogeniczny, co pozwala znacznie uprościć model konstytutywny opisujący zachowanie materiału.

W literaturze można znaleźć wiele makroskopowych modeli konstytutywnych oryginalnie zaproponowanych do opisu matematycznego stałowych płyt ortotropowych (6-8) lub laminatów (9), które z powodzeniem wykorzystywane są również do opisu papieru. Wśród modeli zaproponowanych stricte do numerycznego modelowania papieru warto wymienić te najbardziej popularne, np. (10, 11). Również model (12) oraz jego modyfikacja (13), przeznaczone do opisu tektury, zyskały sporą popularność w przemyśle opakowań aseptycznych. Bez względu na to, który model zostanie wybrany do implementacji w procesie komputerowego projektowania, najważniejszym elementem

pozostaje możliwie precyzyjne określenie wszystkich parametrów wybranego modelu. Większość parametrów materiałowych można wyznaczyć bezpośrednio z testów laboratoryjnych (14), inne należy wyznaczyć np. korzystając z metod odwrotnych (15, 16).

Tektura i papier jako materiał konstrukcyjny

W laboratoriach papierniczych możemy określić zarówno właściwości optyczne, użytkowe, jak i mechaniczne papieru lub tektury. Do najbardziej popularnych testów wytrzymałościowych można zaliczyć np.:

- odporność na zgniatanie przy krótkim wpięciu (*Short Span Compression Test*, w skrócie SCT);
- wytrzymałość na rozciąganie papieru,
- wytrzymałość na przepuklenie papieru lub tektury falistej (*Bursting Test*),
- wytrzymałość na zgniatanie krawędziowe lub płaskie tektury falistej (*Edge Crush Test*, w skrócie ECT oraz *Flat Crush Test*, w skrócie FCT),
- sztywność przy zginaniu tektury (*Bending Stiffness*),
- odporność na przebicie (PET),
- i wiele innych.

Dość nietypowym testem jest określenie sztywności podłużnej i poprzecznej papieru, czy na przykład współczynnika Poissona. Moduł sprężystości podłużnej (zwany modułem Younga) jest wielkością dobrze znaną konstruktorom i inżynierom, rzadziej występującą w specyfikacjach papieru w przemyśle opakowań tekturowych. Tradycyjnie moduł ten można wyznaczyć korzystając z testu rozciągania jednoosiowego próbki. Początkowe nachylenie krzywej odkształcenie-napięcie na wykresie rozciągania (rys. 2a) określa moduł sztywności.

Papier, jako materiał ortotropowy posiada jednak więcej niż jeden moduł sztywności, przez co wymaganych jest więcej testów (rys. 2b) do określenia parametrów sprężystych. Jednym z ciekawszych

eksperymentów wykorzystywanych do określenia właściwości sprężystych papieru jest prosty test nieniszczący, oparty na pomiarze prędkości rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w arkuszu papieru we wszystkich kierunkach (17).

Określenie parametrów sprężystych, o czym była już mowa we wstępie, jest ważnym krokiem w procesie projektowania komputerowego, dlatego w dalszej części artykułu autorzy przybliżą czytelnikowi kilka podstawowych definicji, opis konstytutywny papieru oraz sposób kalibracji stałych materiałowych.

Dla materiałów ortotropowych w płaskim stanie naprężeń relacja pomiędzy odkształceniami sprężystym a naprężeniami wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad [1]$$

gdzie: E_1 – moduł Younga w kierunku maszynowym, E_2 – moduł Younga w kierunku poprzecznym, G_{12} – moduł Kirchoffa, ν_{12} , ν_{21} – współczynniki Poissona. Z uwagi na symetrię materiałowej macierzy podatności relacja pomiędzy współczynnikami Poissona jest następująca:

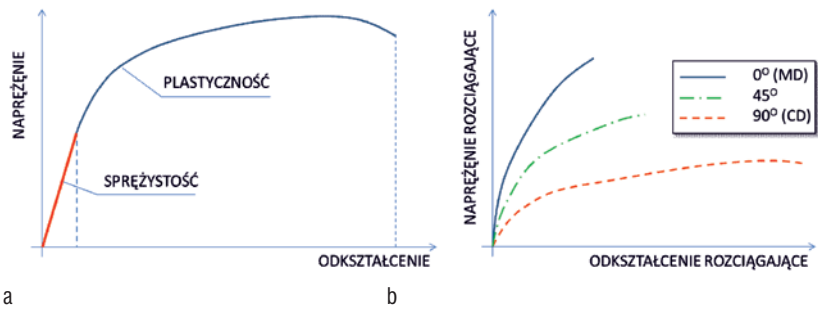
$$\nu_{12} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \nu_{21} \quad [2]$$

Do opisu zachowania papieru w fazie niesprężystej wybrano model Tsai-Wu (9), który oryginalnie zaproponowany był do opisu kryterium zniszczenia cienkich laminatów. Implementacja modelu Tsai-Wu wymaga definicji domeny sprężystej opisanej funkcją plastyczną oraz opisu wzmocnienia materiału.

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{44}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \leq [\sigma_y(\kappa)]^2 \quad [3]$$

gdzie:

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{t1}} - \frac{1}{\sigma_{c1}}; \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_{t2}} - \frac{1}{\sigma_{c2}};$$



a b
Rys. 2. Strefa sprężysta i plastyczna w teście rozciągania osiowego (a), typowe wykresy rozciągania próbki papieru w głównych kierunkach ortotropii (b)

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{t1}\sigma_{c1}}; \quad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{t2}\sigma_{c2}}; \quad [4]$$

$$F_{44} = \frac{1}{\tau_{12}^2};$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma_{b12}^2} [1 - \sigma_{b12}(F_1 + F_2) - \sigma_{b12}^2(F_{11} - F_{22})] \quad [5]$$

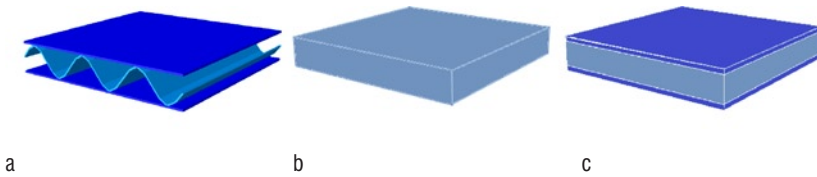
gdzie: σ_{t1} – granica sprężystości materiału przy rozciąganiu w kierunku MD, σ_{c1} – granica sprężystości materiału przy ściskaniu w kierunku MD, σ_{t2} – granica sprężystości materiału przy rozciąganiu w kierunku CD, σ_{c2} – granica sprężystości materiału przy ściskaniu w kierunku CD, τ_{12} – granica sprężystości materiału przy ścinaniu, σ_{b12} – granica sprężystości materiału przy rozciąganiu w teście dwuosiowego rozciągania, $\sigma_y(K)$ – funkcja opisująca wzmocnienie materiału (dla $K = 0$, $\sigma_y = 1$).

Model materiałowy przyjęty do opisu zachowania papieru jest ważnym elementem projektowania komputerowego opakowań z tektury falistej jednakże nie jedynym, który należy wziąć pod uwagę. Innymi ważnymi czynnikami są: poprawny opis fizyczny i matematyczny analizowanego zagadnienia, metoda rozwiązania (numeryczna, analityczna), dobór typu analizy (dynamiczna, statyczna), kinematyka zagadnienia oraz warunki brzegowe i początkowe układu. Wszystkie wymienione składniki stanowią jedną całość, którą można zamknąć w jednym dziale fizyki zwanym „metody komputerowe mechaniki ciała stałego”.

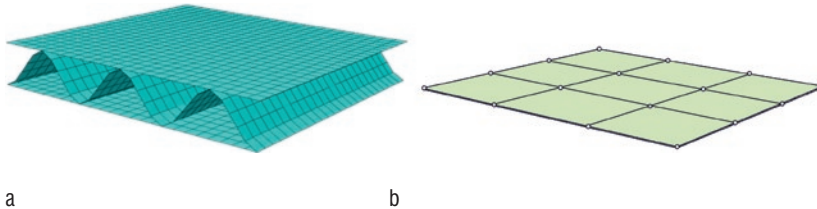
Komputerowa metoda projektowania opakowań

Komputerowe modelowanie konstrukcji opakowania wykonanego z tektury falistej jest zagadnieniem, które wymaga wiedzy z obszaru numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych opisujących zagadnienia początkowo-brzegowe. Jedną z najczęściej stosowanych metod numerycznych do rozwiązywania tego typu problemów jest metoda elementów skończonych (18, 19). Opiera się ona na dyskretyzacji modelu za pomocą prostych geometrycznie elementów i aproksymacji rozwiązania wspomnianych równań w obszarze danego elementu np. wielomianami pierwszego lub drugiego stopnia. Dodatkowo pozwala rozwiązywać zagadnienia silnie nieliniowe, gdzie źródłem nieliniowości może być zarówno materiał, jak i duże przemieszczenia układu.

Z uwagi na specyficzną strukturę przekroju tektury falistej (szczegóły pokazane są na rys. 3a) modelowanie opakowania z uwzględnieniem dokładnej geometrii tektury w skali rzeczywistej jest zagadnieniem bardzo czasochłonnym. Szczególnie, gdy przyjęty model materiałowy jest silnie nieliniowy, przez co problem musi być rozwiązywany iteracyjnie. Dodatkowo lokalne niestateczności ścianek przekroju tektury oraz duże przemieszczenia ścian bocznych opakowania powodują, że model numeryczny nie tylko wymaga



Rys. 3. Model reprezentatywnej próbki tekury falistej (a), model zhomogenizowany do jednej warstwy (b), model zhomogenizowany do trzech warstw (c)



Rys. 4. Model tekury falistej (a), model równoważny powłokowy (b)

bardzo długiego czasu analizy, ale często algorytm przerywa obliczenia z uwagi na brak zbieżności rozwiązania.

Jedną z możliwości uproszczenia analizy jest wykorzystanie algorytmów opartych na jawnym całkowaniu równań ruchu (20), co pozwala ustabilizować rozwiązanie, ale często znacznie wydłuża czas analizy z uwagi na potrzebę zastosowania bardzo krótkiego kroku całkowania.

Homogenizacja tekury falistej wiąże się z uproszczeniem jej periodycznej struktury (rys. 3a) do prostego modelu złożonego z pojedynczych elementów powłokowych (rys. 3b) lub elementów warstwowych (rys. 3c), który poprzez odpowiednio dobrane parametry efektywne zachowuje się podobnie jak pełny model tekury falistej. Parametry efektywne zastępczego modelu można łatwo wyznaczyć metodami analitycznymi, a także, w przypadku bardziej skomplikowanych geometrycznie modeli, metodami numerycznymi. W metodach analitycznych zazwyczaj wykorzystuje się klasyczną teorię laminatów (21) lub metodę homogenizacji asymptotycznej (22), w metodach numerycznych natomiast często wykorzystuje się zasadę równoważności energii sprężystej (23). W obu metodach proces homogenizacji sprowadza się do wyznaczenia w pierwszej kolejności zastępczych sztywności modelu

z uproszczoną geometrią, a następnie efektywnych parametrów niesprężystych. Uproszczenie geometrii tekury falistej do jednej warstwy powłoki o zastępczych parametrach pozwala znacznie skrócić czas analizy i jednocześnie zachować dokładność rozwiązania. Głównym czynnikiem skrócenia czasu analiz numerycznych jest stukrotne lub nawet tysiąckrotne zmniejszenie liczby elementów skończonych w modelu (rys. 4).

Uzyskane w procesie homogenizacji efektywne parametry materiałowe zależą wyłącznie od geometrii, rodzaju składników tekury falistej oraz ich właściwości mechanicznych. Dlatego tak ważne jest, aby poprawnie wyznaczyć parametry konstytutywne wszystkich komponentów tekury falistej, a mianowicie warstw płaskich (zwanymi linerami) oraz warstw pofalowanych (zwanymi flutingiem).

LITERATURA

1. TetraPak (<http://www.tetrapak.com/pl>).
2. TFP Sp. z o.o. (<http://tfp.com.pl/>).
3. IKEA (<http://www.ikea.com/pl/pl/>).
4. Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Cardboard_Cathedral).
5. Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Cardboard_bicycle).
6. Hill R.: "A theory of the yielding and plastic flow in anisotropic metals", Proc. Royal Soc. **193**, 281-297 (1948).
7. Hoffman O.: "The brittle strength of orthotropic materials", J. Composite Mat. **1**, 200-206 (1967).

8. Burzyński W.: "Studium nad hipotezami wyciężenia", Nakładem Akademii Nauk Technicznych, Lwów 1928.
9. Tsai S.W., Wu E.M.: "A general theory of strength for anisotropic materials", J. Composite Mat. **5**, 58-80 (1971).
10. Castro J., Ostoja-Starzewski M.O.: „Elasto-plasticity of paper”, Int. J. Plasticity **19**, 2083-2098 (2003).
11. Makela P., Ostlund S.: "Orthotropic elastic-plastic material model for paper materials", Int. J. Solids Structures **40**, 5599-5620 (2003).
12. Xia Q.S., Boyce M.C., Parks D.M.: "A constitutive model for the anisotropic elastic-plastic deformation of paper and paperboard", Int. J. Solids Structures **39**, 4053-4071 (2002).
13. Harrysson A., Ristinmaa M.: "Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board", Int. J. Solids Structures **45**, 3334-3352 (2008).
14. Baum G.A., Habeger C., Fleischman H.: "Measurement of the orthotropic elastic constants of paper", IPC technical paper series number 117, 1981.
15. Garbowski T., Maier G., Novati G.: "On calibration of orthotropic elastic-plastic constitutive models for paper foils by biaxial tests and inverse analyses", Struc. Multidisciplinary Optimization **46**, 111-128 (2012).
16. Maier G., Buljak V., Garbowski T., Cocchetti G., Novati G.: "Mechanical characterization of materials and diagnosis of structures by inverse analyses: some innovative procedures and applications", Int. J. Computational Methods, w druku.
17. Lorentzen-Wettré (<http://www.lorentzen-wettré.com>).
18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", Butterworth-Heinemann, 2005.
19. Crisfield M. A.: "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Wiley, 1996.
20. de Souza Neto E.A., Peric D., Owen D.R.J.: "Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications", Wiley, 2008.
21. Allaoui S., Benzeggagh M.L., Aboura Z., Talbi N.: "Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modeling", Composite Struc. **63**, 53-62 (2004).
22. Quesnel T., Buannic N., Cartraud P.: "Homogenization of corrugated core sandwich panels", Composite Struc. **59**, 299-312 (2003).
23. Biancolini M.E.: "Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board", Composite Struc. **69**, 322-328 (2005).

Część druga w następnym numerze
Artykuł recenzowany