



# Homogenizacja tektury falistej

## Część 1. Homogenizacja analityczna

### Homogenization of Corrugated Paperboard

#### Part 1. Analytical homogenization

TOMASZ GARBOWSKI, MAREK JARMUSZCZAK

*Homogenization is a key step in the process of boxes and corrugated packages bearing capacity estimation. Because an accurate reconstruction of the complicated cross-section of corrugated board requires the use of a huge amount of finite elements, a full structural model of the entire package becomes impractical and therefore uneconomical. Therefore in practice it can be replaced by the model, which has much simpler geometry. Simplifications of the computational model should not, however, lead to changes in the system response. The main purpose of homogenizing is thus considerable acceleration of numerical analyzes while maintaining the accuracy of the solution. The first part of the paper presents the analytical homogenization techniques of sandwich panels with a periodic core.*

*Keywords: corrugated cardboard, homogenization, finite element methods*

*Homogenizacja jest kluczowym krokiem w procesie komputerowego wyznaczania nośności pudeł i opakowań z tektury falistej. Ponieważ dokładne odzwierciedlenie skomplikowanego przekroju tektury falistej wymaga wykorzystania ogromnej ilości elementów skończonych, pełny model strukturalny całego opakowania jest mało praktyczny i często nieekonomiczny. Dlatego w praktyce można go zastąpić modelem, którego geometria jest znacznie prostsza. Uproszczenia modelu obliczeniowego nie powinny jednak prowadzić do zmiany odpowiedzi systemu. Głównym celem homogenizacji jest zatem znaczne przyspieszenie analiz numerycznych przy jednoczesnym zachowaniu dokładności rozwiązania. W pierwszej części artykułu przedstawiono analityczne techniki homogenizacji płyt warstwowych z rdzeniem o periodycznej strukturze.*

*Słowa kluczowe: tektura falista, homogenizacja, metoda elementów skończonych*

#### Wprowadzenie

Numeryczne modelowanie papieru i tektury jest zagadnieniem, które angażuje coraz większą grupę naukowców w kraju (1-3) i na świecie (4-7). W środowiskach akademickich najczęściej przeprowadza się symulacje komputerowe testów laboratoryjnych w celu weryfikacji nowych opisów konstytutywnych papieru (8-10) lub nowych procedur obliczeniowych (7, 11). Testy te przeprowadza się na niewielkich i nieskomplikowanych geometrycznie próbkach, co pozwala na szybką ocenę przydatności proponowanych rozwiązań. Z kolei w zastosowaniach przemysłowych prym wiodą rozwiązania empiryczne (12, 13) lub uproszczone rozwiązania analityczne (14, 15). Niestety, zarówno zawansowane rozwiązania akademickie, jak i przemysłowe uproszczenia nie zawsze dają się skutecznie zastosować, szczególnie gdy analizowane zagadnienie, czy model są skomplikowane. Przykładem może być analiza nośności opakowań z tektury falistej na podstawie testu ściskania pudła BCT (eng. *Box Compression Test*), podczas którego zaobserwować można nie tylko odpowiedź liniowo-sprężystą materiału, ale również nieliniowe efekty związane z wyboczeniem oraz plastycznością (16, 17). Nierównomierny rozkład naprężeń na krawędziach ścian bocznych pudła w trakcie testu, ortotropia papieru i tektury (rys. 1), imperfekcje geometryczne i heterogeniczność materiału sprawiają, że analiza numeryczna konstrukcji wykonanych z papieru jest zagadnieniem wymagającym dużego doświadczenia oraz zaangażowania zaawansowanych narzędzi. Przedstawione (12, 13) wzory empiryczne mają swoje zastosowanie do oceny wytrzymałości pudła na ściskanie jednakże tylko w ograniczonym zakresie. Ograniczenia dotyczą przede wszystkim wymiarów i kształtu pudła. Wszelkie perforacje, wycięcia lub niestandardowe proporcje opakowania z tektury falistej wykluczają stosowanie wzorów uproszczonych.

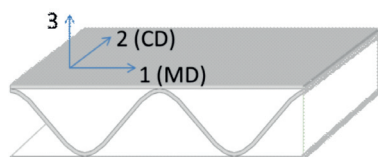
Dr inż. **T. Garbowski**, Politechnika Poznańska, Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań;  
mgr inż. **M. Jarmuszcak**, TFP Sp. z o.o., Dzieńmierowo, ul. Katowicka 26, 62-035 Kórnik

W świetle przedstawionych ograniczeń uproszczonych metod empiryczno-analitycznych najlepszym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie metody, która pozwoli uwzględnić wszystkie nieliniowe efekty, np. metoda elementów skończonych (MES). Metoda ta ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu równań różniczkowych opisujących mechanikę ciała stałego. Jednakże stosowanie jej do skomplikowanych geometrycznie zagadnień prowadzi do bardzo rozbudowanych równań nieliniowych (często kilka milionów stopni swobody), których rozwiązanie jest, pomimo stosowania coraz wydajniejszych komputerów, wciąż dużym wyzwaniem. Zmniejszenie ilości elementów skończonych dyskretyzujących analizowany model prowadzi do znacznych oszczędności czasu obliczeń, jednak zbyt duże uproszczenia wprowadzają znaczne błędy obliczeniowe. Złotym środkiem może być zastosowanie homogenizacji, dzięki której model można zmniejszyć nawet 1000-krotnie, przy możliwie najdokładniejszym zachowaniu jego właściwości mechanicznych.

### Wybrane metody homogenizacji tektury falistej

Homogenizacja pozwala na zastąpienie skomplikowanej geometrycznie struktury konstrukcją znacznie prostszą, która poprzez odpowiednio dobrane efektywne parametry pozwala na poprawne odwzorowanie zachowania pełnego modelu. Ponieważ tektura falista składa się z na przemian ułożonych warstw płaskich i falistych, a każda warstwa często charakteryzuje się różnymi parametrami, dlatego zabieg homogenizacji powinien również uwzględniać uśrednianie własności mechanicznych. Dodatkowo papier i tektura są materiałem ortotropowym, w którym własności mechaniczne zależą od kierunku obciążenia. W papierze wyróżniamy 3 główne kierunki ortotropii:

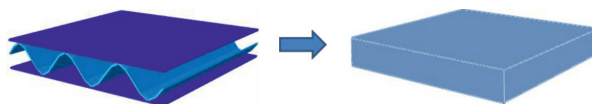
1 – kierunek podłużny (MD, ang. *Machine Direction*), 2 – kierunek poprzeczny (CD, ang. *Cross Direction*) oraz 3 – kierunek prostopadły do płaszczyzny (rys. 1).



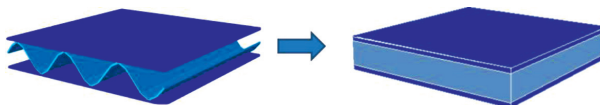
Rys. 1. Główne kierunki materiałowe w tekturze falistej

Wszystkie wymienione cechy papieru powodują, że homogenizacja tektury falistej jest zagadnieniem trudnym i wymagającym. W niniejszej pracy przedstawiono trzy wybrane metody homogenizacji w dwóch wariantach:

- homogenizacja struktury tektury falistej do jednej warstwy (rys. 2),
- homogenizacja flutingu do wewnętrznej warstwy laminatu (rys. 3).



Rys. 2. Homogenizacja do jednej warstwy (typ-1)



Rys. 3. Homogenizacja do laminatu (typ-2)

Zaprezentowane metody homogenizacji polegają na wyznaczeniu zastępczych sztywności oraz grubości efektywnych modelu. Wybrane metody homogenizacji można zgrupować w następujący sposób:

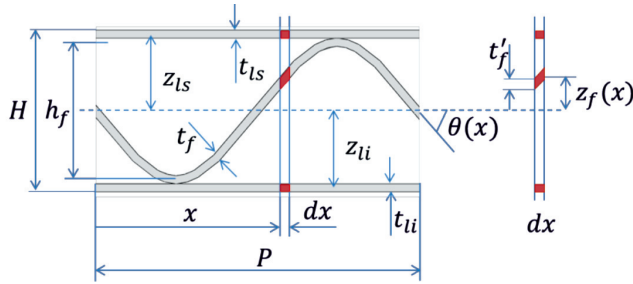
- homogenizacja analityczna oparta na równaniach klasycznej teorii wytrzymałości,
- homogenizacja analityczna oparta na klasycznej teorii laminatów (18),
- homogenizacja numeryczna oparta na metodzie elementów skończonych (19).

Inną popularną metodą homogenizacji jest metoda asymptotycznej ekspansji (20-22), jednak z uwagi na ograniczoną objętość opracowania oraz dość skomplikowane sformułowanie matematyczne metoda ta nie będzie tu omówiona, a zainteresowanych czytelników odsyłamy do literatury (23, 24).

### Homogenizacja inżynierska

Homogenizacja tektury falistej, nazwana „inżynierską”, oparta jest na klasycznej teorii wytrzymałości materiałów w zastosowaniu do belek prostych o złożonych przekrojach. Przekrój składa się z płaskiej warstwy zewnętrznej (na rys. 4 oznaczonej symbolem  $l_s$ , ang. *superior liner*) oraz wewnętrznej (oznaczonej symbolem  $l_i$ , ang. *interior liner*) i z warstwy pofalowanej zwanej flutingiem (oznaczonej symbolem  $f$ ).

Najważniejszym założeniem w homogenizacji inżynierskiej jest przyjęcie takich wartości zastępczych sztywności na zginanie  $\overline{EI}$  oraz sztywności na rozciąganie  $\overline{EA}$  modelu zhomogenizowanego, aby były równe wartościom sztywności modelu strukturalnego. Możemy to zapisać następująco:  $\overline{EI}_{MD} = EI_{MD}$ ,  $\overline{EI}_{CD} = EI_{CD}$ ,  $\overline{EA}_{MD} = EA_{MD}$ ,  $\overline{EA}_{CD} = EA_{CD}$ , gdzie wielkości z nadkreśleniem oznaczają wartości efektywne (uśrednione).



Rys. 4. Przekrój 3-warstwowej tektury falistej

Na rysunku 4 wysokość flutingu wynosi  $h_f = H - t_{li} - t_{ls} - t_f$ , grubość warstwy pofalowanej równa jest  $t'_f = t_f (\cos \theta)^{-1}$ , a kąt  $\theta(x)$  można wyznaczyć z zależności:

$$\theta(x) = \text{atan} \left( \frac{dz_f(x)}{dx} \right). \quad [1]$$

Sztywności zginania modelu strukturalnego w kierunku MD oraz CD wynoszą odpowiednio:

$$EI_{MD} \cong E_{MD}^{ls} t_{ls} z_{ls}^2 + E_{MD}^{li} t_{li} z_{li}^2, \quad [2a]$$

$$EI_{CD} = E_{CD}^{ls} t_{ls} z_{ls}^2 + E_{CD}^{li} t_{li} z_{li}^2 + \frac{E_{CD}^f}{P} \int_0^P t'_f(x) z_f(x)^2 dx. \quad [2b]$$

Wszystkie oznaczenia zilustrowane są na rysunku 4. Jeżeli założymy, że fluting opisany jest funkcją:

$$f(x) = \frac{h_f}{2} \sin \left( \frac{2\pi x}{P} \right), \quad [3]$$

wtedy odległość położenia przekroju flutingu do osi obojętnej  $z_f(x)$  równa jest wartości funkcji  $f(x)$ . Po prostych przekształceniach równanie [2a] oraz [2b] można zapisać:

$$EI_{MD} \cong E_{MD}^{ls} t_{ls} \left( \frac{H - t_{ls}}{2} \right)^2 + E_{MD}^{li} t_{li} \left( \frac{H - t_{li}}{2} \right)^2, \quad [4a]$$

$$EI_{CD} \cong E_{CD}^{ls} t_{ls} \left( \frac{H - t_{ls}}{2} \right)^2 + E_{CD}^{li} t_{li} \left( \frac{H - t_{li}}{2} \right)^2 + E_{CD}^f t_f \frac{1}{P} \int_0^P \frac{f(x)^2}{\cos \theta} dx. \quad [4b]$$

Zhomogenizowane wartości sztywności zginania wyznaczone są dla zastępczego przekroju o wysokości  $h$  i wynoszą odpowiednio dla kierunku MD oraz CD:

$$\overline{EI}_{MD} = \frac{h^3}{12} \overline{E}_{MD}, \quad \overline{EI}_{CD} = \frac{h^3}{12} \overline{E}_{CD}. \quad [5]$$

W równaniach tych  $h$  wciąż jest wartością nieznaną. Niestety nie możemy jej przyjąć a priori, ponieważ może to prowadzić do błędnego oszacowania wartości efektywnych sztywności.

Sztywności rozciągania modelu strukturalnego w kierunku MD oraz CD wyznaczamy z zależności:

$$EA_{MD} \cong E_{MD}^{ls} t_{ls} + E_{MD}^{li} t_{li}, \quad [6a]$$

$$EA_{CD} = E_{CD}^{ls} t_{ls} + E_{CD}^{li} t_{li} + \alpha E_{CD}^f t_f, \quad [6b]$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem rozwinięcia (pofalowania) i można go wyznaczyć z prostej zależności:

$$\alpha = \frac{1}{P} \int_0^P \frac{1}{\cos \theta(x)} dx. \quad [7]$$

Dla przyjętej funkcji opisującej kształt flutingu [3] współczynnik ten opisany jest wzorem:

$$\alpha = \frac{1}{P} \int_0^P \sqrt{1 + \left( \frac{\pi h_f}{P} \cos \left( \frac{2\pi x}{P} \right) \right)^2} dx. \quad [8]$$

Efektywne sztywności rozciągania w kierunku MD i CD zastępczego przekroju o wysokości  $h$  wynoszą więc odpowiednio:

$$\overline{EA}_{MD} = h \overline{E}_{MD}, \quad \overline{EA}_{CD} = h \overline{E}_{CD}. \quad [9]$$

Po wyprowadzeniu zależności na efektywne moduły sztywności możemy oszacować zastępczą grubość  $h$  z przyrównania wartości, wyznaczonych z równania [5] oraz z równania [9]:

$$12 \frac{EI_{MD} + EI_{CD}}{h^3} = \frac{EA_{MD} + EA_{CD}}{h} \rightarrow h = \sqrt{12 \frac{EI_{MD} + EI_{CD}}{EA_{MD} + EA_{CD}}}. \quad [10]$$

Efektywne moduły sztywności w kierunku MD i CD wynoszą więc odpowiednio:

$$\overline{E}_{MD} = \frac{1}{h} EA_{MD} = \frac{12}{h^3} EI_{MD}, \quad [11a]$$

$$\overline{E}_{CD} = \frac{1}{h} EA_{CD} = \frac{12}{h^3} EI_{CD}. \quad [11b]$$

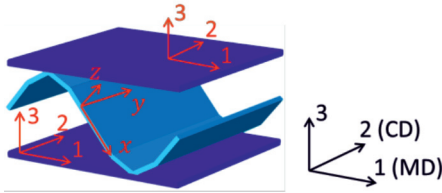
Warto zauważyć, że we wzorach na sztywność zginania [4] i rozciągania [6] w kierunku MD i CD nie uwzględniono wpływu flutingu, jednakże uproszczenie to wprowadza błąd o wartości mniejszej niż 1%. Kolejnym ważnym spostrzeżeniem jest fakt, że korzystając



z uproszczonej homogenizacji „inżynierskiej” nie można niestety wyznaczyć zastępczych wartości współczynników Poissona czy modułów sztywności postaciowej. Żeby wyznaczyć te wartości należy skorzystać z bardziej zaawansowanych metod, na przykład homogenizacji opartej na klasycznej teorii laminatów.

### Klasyczna teoria laminatów

W klasycznej teorii laminatów poszczególne warstwy tektury falistej traktujemy jak płyty laminatu, sprowadzając sztywności warstwy pofalowanej zdefiniowane w osiach lokalnych (xyz) do osi globalnych (123). Kierunek 1 pokrywa się z kierunkiem materiałowym MD, a kierunek 2 z kierunkiem CD (rys. 5).



Rys. 5. Ośie materiałowe lokalne xyz oraz globalne 123

Tensory wraz z odpowiadającymi wektorami naprężeń i odkształceń działającymi w płaszczyźnie każdej warstwy tektury zapisujemy w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T, \quad [12a]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]^T. \quad [12b]$$

Relacja między naprężeniami i odkształceniami wyrażona jest równaniami:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{Q}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad [13a]$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{Q}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\sigma}\}. \quad [13b]$$

gdzie  $[\mathbf{Q}]$  jest macierzą sztywności materiału natomiast  $[\mathbf{C}] = [\mathbf{Q}]^{-1}$  jest macierzą podatności. Dla poszczególnych warstw tektury falistej macierz ta przyjmuje postać:

$$\mathbf{C}_{ls} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^{ls}} & -\frac{\nu_{21}^{ls}}{E_2^{ls}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}^{ls}}{E_1^{ls}} & \frac{1}{E_2^{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^{ls}} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{li} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^{li}} & -\frac{\nu_{21}^{li}}{E_2^{li}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}^{li}}{E_1^{li}} & \frac{1}{E_2^{li}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^{li}} \end{bmatrix} \quad [14a]$$

$$\mathbf{C}_f(x) = [\mathbf{T}(x)][\mathbf{C}'_f][\mathbf{T}(x)]^T, \quad [14b]$$

gdzie  $\mathbf{C}'_f$  jest lokalną macierzą podatności warstwy pofalowanej (flutingu).

$$\mathbf{C}'_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz}^{-1} \end{bmatrix}, \quad [15]$$

a tensor obrotu względem osi y ma postać:

$$\mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & -sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & s \\ -2sc & 0 & 2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix}, \quad [16]$$

gdzie  $c = \cos \theta(x)$  oraz  $s = \sin \theta(x)$ .

Poszczególne komponenty macierzy  $\mathbf{C}_f$  mają następującą postać:

$$C_f(1,1) = \frac{c^2(c^2 - \nu_{xz}s^2)}{E_x} + \frac{s^2(s^2 - \nu_{zx}c^2)}{E_z} + \frac{c^2s^2}{G_{xz}}, \quad [17a]$$

$$C_f(2,2) = \frac{1}{E_y}, \quad [17b]$$

$$C_f(3,3) = \frac{c^2}{G_{xy}} + \frac{s^2}{G_{yz}}, \quad [17c]$$

$$C_f(1,2) = \frac{-\nu_{yx}c^2 - \nu_{yz}s^2}{E_y}, \quad [17d]$$

$$C_f(2,1) = -\frac{\nu_{xy}c^2}{E_x} - \frac{\nu_{zy}s^2}{E_z}. \quad [17e]$$

Związki między siłami normalnymi i momentami w powłoce a odkształceniami w płaszczyźnie i krzywiznami można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad [18]$$

gdzie:  $\mathbf{N}$  jest wektorem sił normalnych  $[N_x, N_y, N_{xy}]^T$ ,  $\mathbf{M}$  jest wektorem momentów zginających  $[M_x, M_y, M_{xy}]^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jest wektorem odkształceń opisanym wzorem [12b] a  $\boldsymbol{\kappa}$  opisuje krzy-



wizny  $[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}]^T$ . Poszczególne podmacierze **A**, **B**, **D** można wyznaczyć z zależności:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} = \frac{1}{P} \int_0^P \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathbf{Q}\{1, z, z^2\} dz dx, \quad [19]$$

gdzie **A** jest sumą iloczynów macierzy sztywności  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^{-1}$  i grubości poszczególnych papierów (zwana macierzą sztywności rozciągania):

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_{ls}^{-1} t_{ls} + \mathbf{C}_{li}^{-1} t_{li} + \frac{1}{P} \int_0^P \mathbf{C}_f^{-1}(x) t_f'(x) dx, \quad [20]$$

**B** jest sumą iloczynów macierzy sztywności i momentów statycznych przekroju tektury:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{ls}^{-1} t_{ls} z_{ls} + \mathbf{C}_{li}^{-1} t_{li} z_{li} + \frac{1}{P} \int_0^P \mathbf{C}_f^{-1}(x) t_f'(x) z_f(x) dx, \quad [21]$$

**D** jest sumą iloczynów macierzy sztywności i momentów bezwładności poszczególnych papierów (zwana macierzą sztywności zginania):

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_{ls}^{-1} t_{ls} z_{ls}^2 + \mathbf{C}_{li}^{-1} t_{li} z_{li}^2 + \frac{1}{P} \int_0^P \mathbf{C}_f^{-1}(x) t_f'(x) z_f(x)^2 dx. \quad [22]$$

Podobnie jak w przypadku poprzedniego (uproszczonego) rozwiązania, tutaj również w pierwszej kolejności powinno się wyznaczyć zastępczą grubość efektywną przekroju:

$$h = \sqrt{12 \frac{\sum_{i=1}^3 D_{ii}}{\sum_{i=1}^3 A_{ii}}}. \quad [23]$$

Znając efektywną grubość zastępczą można ostatecznie wyznaczyć efektywne właściwości mechaniczne tektury, wykorzystując macierze **A** lub **D**:

$$\mathbf{A} = h\mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^A, \bar{E}_{CD}^A, \bar{G}_{MDCD}^A, \bar{\nu}_{MDCD}^A \quad [24a]$$

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^D, \bar{E}_{CD}^D, \bar{G}_{MDCD}^D, \bar{\nu}_{MDCD}^D \quad [24b]$$

lub wyznaczyć wartości uśrednione:

$$\bar{E}_{MD} = \frac{1}{2} (\bar{E}_{MD}^A + \bar{E}_{MD}^D), \quad \bar{E}_{CD} = \frac{1}{2} (\bar{E}_{CD}^A + \bar{E}_{CD}^D), \quad [25a]$$

$$\bar{G}_{MDCD} = \frac{1}{2} (\bar{G}_{MDCD}^A + \bar{G}_{MDCD}^D), \quad \bar{\nu}_{MDCD} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{MDCD}^A + \bar{\nu}_{MDCD}^D). \quad [25b]$$

*Badania finansowane przez projekt „Staże i szkolenia drogą do komercjalizacji wiedzy” zrealizowany w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki 2007-2013.*

## LITERATURA

1. Łęcka M., Mania R., Marynowski K.: „New Method of the Compressive Strength of Corrugated Board Determination”, *Przegl. Papiern.* **62**, 3, 150-153 (2006).
2. Łęcka M., Mania R., Marynowski K.: „New Method of the ECT Index of Corrugated Board Determination”, *Przegl. Papiern.* **62**, 4, 207-210 (2006).
3. Szewczyk W., Marynowski K.: „New method of the BCT index of corrugated board determination”, *Opakowanie*, **7**, 44-48 (2007).
4. Patel P., Nordstrand T., Carlsson L.A.: “Local buckling and collapse of corrugated board under biaxial stress”, *Composite Structures* **39**, 1-2, 97-110 (1997).
5. Isakssona P., Hägglund R.: “A mechanical model of damage and delamination in corrugated board during folding”, *Eng. Fracture Mechanics* **72**, 15, 2299–2315 (2005).
6. Beex, L.A.A., Peerlings, R.H.J.: “An experimental and computational study of laminated paperboard creasing and folding”, *Int. J. Solids Structures* **46**, 4192-4207 (2009).
7. Nygårds, M.: Experimental techniques for characterization of elastic-plastic material properties in paperboard, *Nordic Pulp Paper Res. J.* **23**, 432-437 (2008).
8. Makela P., Ostlund S.: “Orthotropic elastic-plastic material model for paper materials”, *Int. J. Solids Structures* **40**, 5599-5620 (2003).
9. Xia Q.S., Boyce M.C., Parks D.M.: “A constitutive model for the anisotropic elastic-plastic deformation of paper and paperboard”, *Int. J. Solids Structures* **39**, 4053-4071 (2002).
10. Garbowski T., Maier G., Novati G.: “On calibration of orthotropic elastic-plastic constitutive models for paper foils by biaxial tests and inverse analyses”, *Structural Multidisciplinary Optimization* **46**, 111-128 (2012).
11. Isaksson P., Krusper A., Gradin P.A.: “Shear correction factors for corrugated core structures”, *Composite Structures* **80**, 1, 123-130 (2007).
12. Baum G.A., Habeger C., Fleischman H.: “Measurement of the orthotropic elastic constants of paper”, *IPC technical paper series number 117*, (1981).
13. Baum G.A., Brennan D.C., Habeger C.C.: “Orthotropic elastic constants of paper”. *Tappi J.* **64**, 8, 97-101 (1981).
14. Szewczyk W.: “Column Crush Resistance of Corrugated Board”, *Przegl. Papiern.* **64**, 1, 42-46 (2008).
15. Szewczyk W.: “Edge Crush Test of Corrugated Board”, *Przegl. Papiern.* **64**, 2, 93-96 (2008).
16. Garbowski T., Jarmuszcak M.: “Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 1. Theoretical Assumptions in Numerical Modeling of Paperboard Packages”, *Przegl. Papiern.* **70**, 4, 219-222 (2014).
17. Garbowski T., Jarmuszcak M.: “Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 2. Experimental Tests and Numerical Analysis of Paperboard Packages”, *Przegl. Papiern.* **70**, 5, 277-281 (2014).
18. Allaoui S., Benzeggagh M.L., Aboura Z., Talbi N.: “Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modeling”, *Composite Structures* **63**, 53-62 (2004).
19. Biancolini M.E.: “Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board”, *Composite Structures* **69**, 322-328 (2005).
20. Michel J.C., Moulinec H., Suquet P.: “Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172, 109-143 (1999).
21. Chung P.W., Tamma K.K., Namburu R.R.: “Asymptotic expansion homogenization for heterogeneous media: computational issues and applications” *Composites: Part A*, 32, 1291-1301 (2001).
22. Quesnel T., Buannic N., Cartraud P.: “Homogenization of corrugated core sandwich panels”, *Composite Structures* **59**, 299-312 (2003).
23. Lewiński T., Telega J.J.: “Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization”, *World Scientific*, Singapore, 2000.
24. Urbański A.: “The unified finite element formulation of homogenization of structural members with periodic microstructure”, *Politechnika Krakowska*, Kraków 2005.

Artykuł recenzowany