



Homogenizacja tektury falistej

Część 2. Homogenizacja numeryczna

Homogenization of Corrugated Paperboard

Part 2. Numerical homogenization

TOMASZ GARBOWSKI, MAREK JARMUSZCZAK

Artykuł jest kontynuacją pracy dotyczącej homogenizacji tektury falistej. Homogenizacja jest procesem, który umożliwia zastąpienie heterogenicznej struktury tektury falistej homogenicznym modelem zastępczym. Poprzez odpowiedni dobór parametrów efektywnych modelu zastępczego można uzyskać wyniki zbliżone do tych, które generuje model strukturalny. W drugiej części artykułu przedstawiono numeryczne techniki homogenizacji płyt warstwowych z rdzeniem o periodycznej strukturze. Techniki numerycznej homogenizacji oparte są na metodzie elementów skończonych. W pracy przedstawiono parametry efektywne uzyskane metodami analitycznymi oraz numerycznymi. Autorzy zestawili również porównanie wyników uzyskanych z modelu strukturalnego oraz z modeli uproszczonych.

Słowa kluczowe: tektura falista, homogenizacja, metoda elementów skończonych

This article is a continuation of a work concerning homogenization of corrugated cardboard. Homogenization is a process that allows to replace the heterogeneous structure of corrugated paperboard with a homogeneous surrogate model. Through an appropriate choice of effective parameters in surrogate model one can obtain results similar to those that are generated by the structural model. The second part of the paper presents numerical homogenization techniques of sandwich panels with a periodic core structure. Numerical homogenization techniques are based here on the finite element method. The paper summarizes the effective parameters obtained from analytical and numerical methods. The comparison of the results obtained from the structural model and the simplified models is also presented.

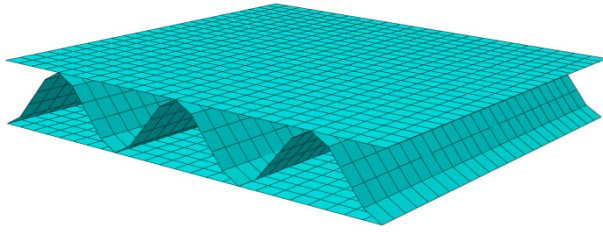
Keywords: corrugated cardboard, homogenization, finite element methods

Krótkie wprowadzenie

Metoda elementów skończonych (1-3) zastosowana w niniejszej pracy w procesie homogenizacji jest jedną z najczęściej wykorzystywanych metod numerycznych na świecie. Jej powodzenie i popularność wynika z bardzo prostego sformułowania matematycznego oraz wielu ogólnie dostępnych rozwiązań typowych problemów inżynierskich. Tym samym metoda elementów skończonych (MES) znalazła bardzo szerokie zastosowanie również w homogenizacji numerycznej laminatów oraz płyt i powłok z periodycznym rdzeniem (np. tektura falista). W literaturze naukowej można znaleźć prace dotyczące wykorzystania MES w homogenizacji opartej na wieloskalowym modelowaniu numerycznym (4), czy klasycznej metodzie asymptotycznej ekspansji (ang. *asymptotic expansion*) (5-7). W niniejszym artykule zaprezentowano metodę homogenizacji numerycznej (8), w której model numeryczny pełnej struktury tektury falistej wykorzystany jest do wyznaczenia zastępczej sztywności poprzez zastosowanie twierdzenia Hilla-Mandela.

Homogenizacja numeryczna

Homogenizacja numeryczna jest najbardziej uniwersalną techniką, opartą, jak już wspomniano, na metodzie elementów skończonych, gdzie w pierwszej kolejności należy stworzyć model numeryczny reprezentatywnej próbki objętościowej (ang. *representative volume element*, RVE). Przykład takiej próbki przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Próbkę reprezentatywna wykorzystana do homogenizacji numerycznej

Następnie należy wyznaczyć macierz sztywności całego modelu $\mathbf{K}_{dof \times dof}$, gdzie dof jest liczbą stopni swobody (ang. *degrees of freedom*), zdefiniowaną jako iloczyn liczby wszystkich węzłów i stopni swobody w pojedynczym węźle. W implementacji autorów przyjęto, że zestaw aktywnych stopni swobody w każdym węźle zdefiniowany jest następującym wektorem:

$$\{u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2\}. \quad [1]$$

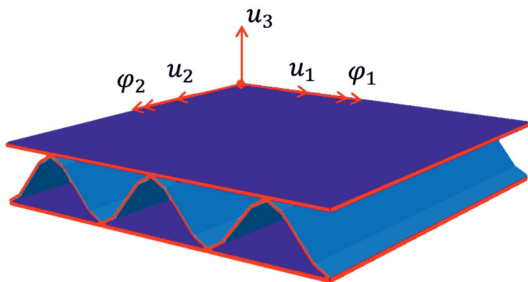
Następnie macierz sztywności skondensowana (sprowadzona) jest do zewnętrznych krawędzi RVE (zaznaczonych kolorem czerwonym na rys. 2). Skondensowana macierz sztywności, oznaczona jako $\bar{\mathbf{K}}$ ma wymiar $dof' \times dof'$, gdzie dof' równa się sumie iloczynów liczby węzłów na krawędziach RVE i stopni swobody w każdym węźle.

Jeżeli macierz $\bar{\mathbf{K}}$ zostanie podzielona na bloki tak, aby zgrupować sztywności przypadające na węzły wewnętrzne i zewnętrzne (na krawędziach RVE), to skondensowaną macierz sztywności można zapisać w następujący sposób:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \quad [2]$$

Zgrupowane bloki skondensowanej macierzy mają postać:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ee}] & [\mathbf{K}_{ei}] \\ [\mathbf{K}_{ei}] & [\mathbf{K}_{ii}] \end{bmatrix}. \quad [3]$$



Rys. 2. Stopnie swobody w pojedynczym węźle na krawędzi elementu reprezentatywnego

Wektor stałych uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ powiązany jest z przemieszczeniami i -tego węzła \mathbf{u}_i na krawędziach RVE poprzez podmacierz $[\mathbf{A}_e]_i$:

$$\{\mathbf{u}\}_i = [\mathbf{A}_e]_i \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad [4]$$

gdzie:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x^i & 0 & \frac{y^i}{2} & x^i z^i & 0 & \frac{x^i z^i}{2} \\ 0 & y^i & \frac{x^i}{2} & 0 & y^i z^i & \frac{x^i z^i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x^i x^i}{2} & \frac{-y^i y^i}{2} & \frac{x^i y^i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y^i & \frac{-x^i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & x^i & 0 & \frac{y^i}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_{12} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}. \quad [5]$$

Wykorzystując definicję energii odkształceń sprężystych (8) można w łatwy sposób wyznaczyć macierz sztywności laminatu:

$$[\mathbf{ABD}] = \frac{\mathbf{A}_e^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{A}_e}{p^2}. \quad [6]$$

Z tak wyznaczonej macierzy \mathbf{ABD} , podobnie jak w przypadku homogenizacji analitycznej, przedstawionej w pierwszej części artykułu (9), można w pierwszym kroku obliczyć zastępczą grubość efektywną (10) z równania:

$$h = \sqrt{12 \frac{\sum_{i=1}^3 D_{ii}}{\sum_{i=1}^3 A_{ii}}}, \quad [7]$$

a następnie efektywne parametry zastępcze z równania:

$$\mathbf{A} = h \mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^A, \bar{E}_{CD}^A, \bar{G}_{MDCD}^A, \bar{\nu}_{MDCD}^A \quad [8a]$$

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^D, \bar{E}_{CD}^D, \bar{G}_{MDCD}^D, \bar{\nu}_{MDCD}^D \quad [8b]$$

lub efektywne wartości średnie z równania:

$$\bar{E}_{MD} = \frac{1}{2} (\bar{E}_{MD}^A + \bar{E}_{MD}^D), \bar{E}_{CD} = \frac{1}{2} (\bar{E}_{CD}^A + \bar{E}_{CD}^D), \quad [9a]$$

$$\bar{G}_{MDCD} = \frac{1}{2} (\bar{G}_{MDCD}^A + \bar{G}_{MDCD}^D), \bar{\nu}_{MDCD} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{MDCD}^A + \bar{\nu}_{MDCD}^D). \quad [9b]$$

Przykłady obliczeniowe i wnioski

W celu porównania wyników homogenizacji przeprowadzonej różnymi metodami, wykorzystany został test sztywności zginania (rys. 3) próbek tektury falistej (rys. 4), wykonanej z warstw o właściwościach mechanicznych i grubościach przedstawionych



w tabeli 1. Konstrukcja jest symetryczna z uwagi na wykorzystanie zewnętrznych warstw płaskich wykonanych z tego samego materiału. W przypadku niesymetrycznych konstrukcji należy wziąć pod uwagę wpływ parametrów zginania na rozciąganie oraz parametrów rozciągania na zginanie, co wymaga uwzględnienia w procesie homogenizacji również podmacierzy **B**.

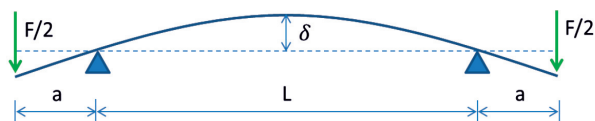
Tabela 1. Parametry geometryczne i materiałowe składowych papierów tektury falistej

Warstwy tektury	grubość [mm]	E_{MD} [MPa]	E_{CD} [MPa]	ν_{MDCD} [-]	G_{MDCD} [MPa]
warstwa zewnętrzna	0,29	3326	1694	0,34	859
warstwa pofalowana	0,30	2614	1532	0,32	724
warstwa wewnętrzna	0,29	3326	1694	0,34	859

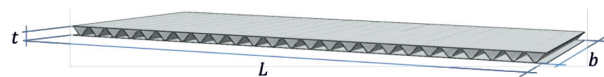
Wartości pozostałych parametrów materiałowych, z uwagi na ich marginalne znaczenie, przyjęto a priori równe dla wszystkich warstw tektury, odpowiednio: $E_3 = 10$ MPa, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.01$, $G_{13} = G_{23} = 5$ MPa.

Do obliczeń numerycznych został wybrany komercyjny program Abaqus w wersji 6.13 firmy 3DS Simulia (11). W obliczeniach wykorzystano linowe elementy powłokowe, 4-węzłowe z pełnym całkowaniem (6 stopni swobody w każdym węźle). Liczba elementów skończonych w modelu strukturalnym wynosi 20 tysięcy, natomiast w modelu zhomogenizowanym - 200.

Schemat obliczeniowy dla próbki zginanej metodą czteropunktową przedstawiono na rysunku 3, natomiast wymiary próbki oraz geometrię warstwy pofalowanej – na rysunku 4.



Rys. 3. Schemat statyczny testu czteropunktowego zginania



Rys. 4. Próbką o wymiarach: $L=200$ mm, $b=100$ mm, $t=3,8$ mm, podziałka $P=8$ mm

W tabeli 2 zestawiono główne wartości macierzy **ABD** w przypadku homogenizacji struktury tektury falistej do jednej warstwy (typ-1) oraz do laminatu (typ-2) metodą analityczną, opartą na klasycznej teorii laminatów (CLPT) przedstawioną w pracy (9) oraz metodą numeryczną (NumH).

Tabela 2. Wartości sztywności rozciągania i zginania uzyskane różnymi metodami homogenizacji

Komponent sztywności	CLPT typ-1	NumH typ-1	CLPT typ-2	NumH typ-2
A(1,1)	2116,80	2141,50	67,22	74,80
A(1,2)	367,21	381,77	12,26	21,31
A(2,2)	1654,80	1659,90	610,90	614,22
A(3,3)	785,81	665,50	287,64	167,13
D(1,1)	6498,00	6445,20	170,95	98,11
D(1,2)	1127,10	1124,30	31,35	22,93
D(2,2)	3935,30	3917,40	712,81	693,26
D(3,3)	1872,00	1698,50	334,14	155,89

W tabelach 3 i 4 pokazano wartości efektywne: (a) grubości, (b) moduły sztywności podłużnej, (c) poprzecznej oraz (d) współczynnik Poissona. Wartości wyznaczone z podmacierzy **A** (równanie [8a]), podmacierzy **D** (równanie [8b]) oraz na podstawie wzoru [9].

Tabela 3 zawiera wartości zhomogenizowane do jednej warstwy uzyskane metodą analityczną (CLPT) przedstawioną w pracy (9), natomiast tabela 4 – metodą numeryczną (NumH).

Tabela 3. Parametry efektywne uzyskane metodą homogenizacji analitycznej (typ-1)

Efektywne parametry	na podstawie wzoru [9]	na podstawie wzoru [8a]	na podstawie wzoru [8b]
grubość	5,69	5,69	5,69
E_{MD}	379,67	357,56	401,78
E_{CD}	261,42	279,52	243,33
G_{MDCD}	129,92	138,05	121,80
ν_{MDCD}	0,25	0,22	0,29

Tabela 4. Parametry efektywne uzyskane metodą homogenizacji numerycznej (typ-1)

Efektywne parametry	na podstawie wzoru [9]	na podstawie wzoru [8a]	na podstawie wzoru [8b]
grubość	5,69	5,69	5,69
E_{MD}	379,57	360,79	398,35
E_{CD}	260,88	279,65	242,12
G_{MDCD}	113,71	116,91	110,51
ν_{MDCD}	0,26	0,23	0,29

Tabele 5 i 6 zawierają wartości wyznaczone analogicznie jak w poprzednim przypadku, jednakże homogenizacja dotyczy tylko warstwy pofalowanej. Warto zauważyć, że sztywność flutingu w kierunku podłużnym (MD) jest ok. 20-krotnie niższa niż w kierunku poprzecznym (CD). W przypadku homogenizacji tektury do laminatu (typ-2) grubość zastępczą przyjmuje się równą wysokości warstwy pofalowanej, pomimo większych rozbieżności pomiędzy parametrami efektywnymi wyznaczonymi ze wzorów na sztywność zginania [8b] i sztywność rozciągania [8a]. Uśrednienie parametrów efektywnych uzyskanych dla grubości równej wysokości flutingu (wartości pogrubione w tabelach 5 i 6) daje wyniki najbliższe otrzymanym z modelu strukturalnego. Poprzez przyjęcie zastępczej grubości warstwy pofalowanej, innej niż początkowa wysokość tej warstwy, wprowadza się zmianę sztywności warstw zewnętrznych (linerów) z uwagi na zwiększanie (zmniejszanie) ich odległości od osi obojętnej, co prowadzi do zwiększenia (zmniejszenia) momentu bezwładności tych warstw i dalszej rozbieżności w wynikach.

Tabela 5. Parametry efektywne uzyskane metodą homogenizacji analitycznej (typ-2)

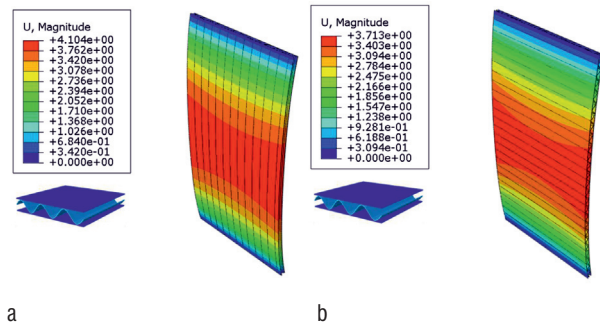
Efektywne parametry	ze wzoru [9]	ze wzoru [8a]	ze wzoru [8b]	ze wzoru [9]	ze wzoru [8a]	ze wzoru [8b]
grubość	3,89	3,89	3,89	3,22	3,22	3,22
E_{MD}	25,89	17,22	34,57	40,87	20,80	60,95
E_{CD}	150,29	156,46	144,13	221,59	189,03	254,14
G_{MDCD}	71,02	73,94	68,11	104,71	89,32	120,10
ν_{MDCD}	0,03	0,02	0,04	0,03	0,02	0,04

Tabela 6. Parametry efektywne uzyskane metodą homogenizacji numerycznej (typ-1)

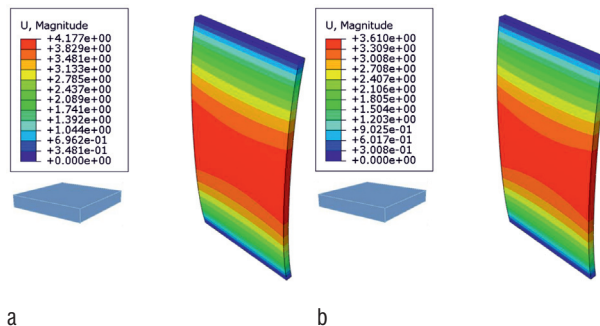
Efektywne parametry	ze wzoru [9]	ze wzoru [8a]	ze wzoru [8b]	ze wzoru [9]	ze wzoru [8a]	ze wzoru [8b]
grubość	3,64	3,64	3,64	3,22	3,22	3,22
E_{MD}	22,23	20,32	24,15	28,99	23,00	34,99
E_{CD}	168,76	166,90	170,63	218,05	188,86	247,25
G_{MDCD}	42,27	45,87	38,67	53,96	51,90	56,03
ν_{MDCD}	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03

Rysunki 10-12 przedstawiają mapy przemieszczeń próbek w teście zginania czteropunktowego. Maksymalne wartości przemieszczeń uzyskane z symulacji testu zginania w kierunku MD (rys. 4a) oraz CD (rys. 4b), wykorzystującej model strukturalny, są bardzo zbliżone do wartości ugięć uzyskanych z modelu zhomogenizowanego do jednej warstwy (typ-1) metodą numeryczną

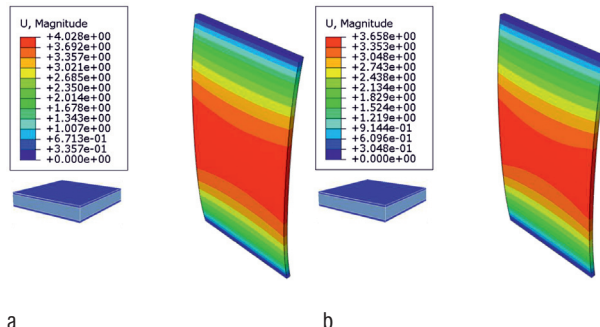
(rys. 5) oraz z modelu zhomogenizowanego do laminatu (typ-2) metodą analityczną (rys. 6). Wszystkie wyniki opracowano z wykorzystaniem nieliniowej metody elementów skończonych.



Rys. 4. Ugięcia w kierunku osi z [mm] modelu strukturalnego w wyniku zginania próbki (a) w kierunku MD oraz (b) w kierunku CD

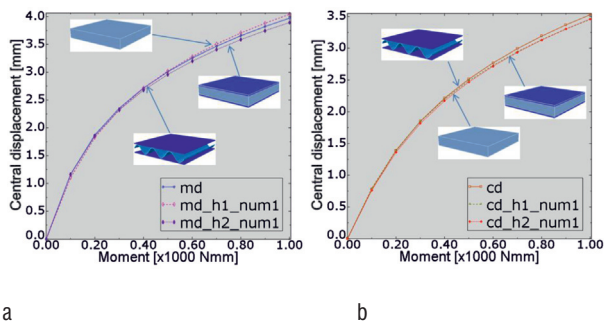


Rys. 5. Ugięcia w kierunku osi z [mm] modelu homogenizowanego do jednej warstwy w wyniku zginania próbki (a) w kierunku MD oraz (b) w kierunku CD

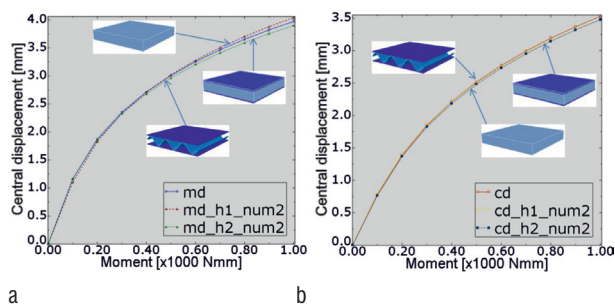


Rys. 6. Ugięcia w kierunku osi z [mm] modelu homogenizowanego do laminatu w wyniku zginania próbki (a) w kierunku MD oraz (b) w kierunku CD

Rysunki 7 i 8 przedstawiają wykresy nieliniowej zależności pomiędzy momentem zginającym w kierunku MD (rys. 7a i 8a) oraz w kierunku CD (rys. 7b i 8b) a wartością maksymalnego ugięcia próbki w środku rozpiętości. Na rysunku 7 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych z modelu strukturalnego oraz modeli zhomogenizowanych do jednej warstwy i laminatu metodą analityczną, natomiast na rysunku 8 – metodą numeryczną.



Rys. 7. Zależność ugięcia w kierunku osi z od momentu zginającego wszystkich trzech modeli, przy zginaniu próbki (a) w kierunku MD oraz (b) w kierunku CD. Homogenizacja analityczna



Rys. 8. Zależność ugięcia w kierunku osi z od momentu zginającego wszystkich trzech modeli, przy zginaniu próbki (a) w kierunku MD oraz (b) w kierunku CD. Homogenizacja numeryczna

Podsumowanie

W pracy zaprezentowano wybrane metody homogenizacji analitycznej oraz numerycznej modelu strukturalnego tektury falistej. Wyniki jednoznacznie potwierdzają możliwość zastosowania zarówno metody analitycznej opartej na klasycznej teorii laminatów, jak i metody numerycznej homogenizacji modeli sprowadzonych do jednej warstwy oraz do laminatu. Ważnym elementem homogenizacji jest poprawne wyznaczenie zastępczej grubości. W przypadku homogenizacji do jednej warstwy, zastępcza grubość jest wyznaczana tak, aby uzyskać najlepszą zgodność pomiędzy efektywną sztywnością zginania oraz sztywnością rozciągania z odpowiadającymi sztywnościami modelu strukturalnego. W tym przypadku grubość zastępcza zazwyczaj jest większa niż wyjściowa wysokość tektury falistej. Homogenizacja do laminatu wiąże się z przyjęciem zastępczej grubości równej wysokości warstwy pofalowanej, co pozwala na modyfikację tylko tej warstwy (pozostałe warstwy zewnętrzne pozostają bez zmian).

Odpowiednie zastosowanie technik homogenizacji tektury falistej umożliwia stworzenie uproszczonego modelu numerycznego, dzięki któremu można wiarygodnie oszacować np. wytrzymałość pudła na ściskanie (12, 13). Celem homogenizacji, jak już wielokrotnie podkreślano w tekście, jest skrócenie czasu analizy oraz możliwie wierne odzwierciedlenie zachowania pełnego modelu strukturalnego. W pracy udowodniono, że model obliczeniowy poddany procedurze homogenizacji pozwala znacznie zredukować ilość stopni swobody (nawet 1000-krotnie), a także uzyskać wyniki jakościowo i ilościowo zgodne z wynikami otrzymanymi z analizy wykorzystującej pełny model strukturalny.

Badania finansowane przez projekt „Staże i szkolenia drogą do komercjalizacji wiedzy” zrealizowany w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki 2007-2013.

LITERATURA

- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", Butterworth-Heinemann, 2005.
- Crisfield M. A.: "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Wiley, 1996.
- Bathe K.-J.: "Finite element procedures", Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996.
- Miehe C., Koch A.: "Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains", *Archive of Applied Mechanics* **72**, 300-317 (2002).
- Cheng G.-D., Cai Y.-W., Xu L.: "Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials", *Acta Mechanica Sinica* **29**, 4, 550-556 (2013)
- Quesnel T., Buannic N., Cartraud P.: "Homogenization of corrugated core sandwich panels", *Composite Structures* **59**, 299-312 (2003).
- Lewiński T., Telega J.J.: "Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization", World Scientific, Singapore, 2000.
- Biancolini M.E.: "Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board", *Composite Structures* **69**, 322-328 (2005).
- Garbowski T., Jarmuszcak M.: "Homogenization of corrugated paperboard. Part 1. Analytical homogenization", *Przegl. Papiern.* **70**, 6, 345-349 (2014).
- Abaqus Analysis User's Guide. 29.6.4 Shell section behavior.
- <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/overview/>
- Garbowski T., Jarmuszcak M.: "Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 1. Theoretical Assumptions in Numerical Modeling of Paperboard Packages", *Przegl. Papiern.* **70**, 4, 219-222 (2014).
- Garbowski T., Jarmuszcak M.: "Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 2. Experimental Tests and Numerical Analysis of Paperboard Packages", *Przegl. Papiern.* **70**, 5, 277-281 (2014).