



Stateczność opakowań z tektury falistej

The Stability of Corrugated Board Packages

TOMASZ GARBOWSKI, ARTUR BORYSIEWICZ

The loss of global or local stability of a corrugated board's cross-section, presented in this article, is an important issue in the board packaging design. Local buckling of the thin-walls of the multi-layer corrugated section occurs even at very short samples used in the ECT tests (Edge Crush Test). Global buckling of the whole cross-section is, however, a key phenomenon in the BCT tests (Box Compression Test). In this paper authors present modern methods of determining the critical force, causing the loss of stability of multilayered orthotropic plates section with the periodic core. The paper presents a strict analytical solution of the problem, compared with the results of numerical analysis of the full structural model and the homogenized model of corrugated board. Presented numerical solutions are based on the finite element method.

Keywords: corrugated board, homogenization, stability

Zagadnienie dotyczące utraty globalnej lub lokalnej stateczności przekroju tektury falistej, prezentowane w niniejszym artykule, stanowi ważny problem w procesie projektowania konstrukcji opakowań tekturowych. Wyboczenie lokalne ścianek przekroju wielowarstwowej tektury falistej występuje nawet przy bardzo niskich próbkach stosowanych w testach ECT (Edge Crush Test). Wyboczenie globalne całego przekroju jest z kolei kluczowym zjawiskiem w testach BCT (Box Compression Test). W niniejszej pracy Autorzy prezentują nowoczesne metody wyznaczania siły krytycznej, powodującej utratę stateczności przekroju wielowarstwowych płyt ortotropowych z periodycznym rdzeniem. W pracy zaprezentowano ściśle rozwiązanie analityczne zagadnienia, porównane z wynikami analiz numerycznych pełnego modelu strukturalnego oraz uproszczonego modelu zhomogenizowanego tektury falistej. Prezentowane rozwiązania numeryczne oparte są na metodzie elementów skończonych.

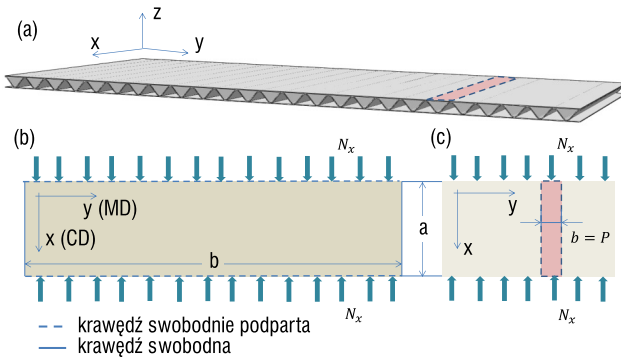
Słowa kluczowe: tektura falista, homogenizacja, stateczność

Wprowadzenie

Dobór przekroju konstrukcji nośnej pudła z tektury falistej jest bardzo ważnym krokiem w procesie optymalnego projektowania opakowań transportowych, a także opakowań typu „Shelf Ready Packaging” (SRP). Wielu autorów w kraju i na świecie wskazuje na potrzebę wykorzystania narzędzi numerycznych w projektowaniu opakowań papierowych (1, 2), aby np. usprawnić i zoptymalizować proces wyznaczania odporności na zgniatanie (3) lub wytrzymałości na ściskanie (4) pudeł z tektury. Narzędzia numeryczne, w obecnej dobie odgrywają coraz ważniejszą rolę w różnych dziedzinach przemysłu, w tym również w przemyśle papierniczym. Wykorzystanie komputerów i odpowiedniego oprogramowania CAD (np. Kasemake, EngView Package Designer Suite, czy ArtiosCAD) pozwala na szybkie zaprojektowanie optymalnego kształtu opakowania (5). Równoległe do projektowania geometrycznego można również przeprowadzić projektowanie wytrzymałościowe, czyli numerycznie optymalizować dobór tektury falistej, z której wykonane będzie projektowane pudło. Aby tego dokonać, należy zbudować model numeryczny opakowania i przeprowadzić serię wirtualnych testów wytrzymałościowych dla: różnych kombinacji papierów składowych tektury falistej, różnych wysokości fali, różnych ilości warstw i różnych, tańszych (alternatywnych) materiałów makulaturowych.

W procesie wyznaczania nośności opakowania z tektury falistej, bardzo istotnym elementem jest określenie siły krytycznej, powodującej utratę stateczności przekroju. Ponieważ tektura falista charakteryzuje się złożonym przekrojem i skomplikowanym opisem konstytutywnym, wyznaczenie siły krytycznej jest zagadnieniem, które wymaga zaawansowanych narzędzi numerycznych.

W niniejszej pracy przedstawione jest rozwiązanie analityczne problemu utraty stateczności próbki z tektury falistej w dwóch



Rys. 1. Model tektury falistej: (a) widok próbki z zaznaczoną ścianką poddaną analizie lokalnego wybożenia, (b) widok z góry całej próbki do analizy globalnego wybożenia z warunkami brzegowymi, (c) widok z góry wyciętej myślowo ścianki przekroju do analizy lokalnego wybożenia z warunkami brzegowymi

typowych wariantach podparcia – swobodnie podpartej na dwóch krawędziach prostopadłych do kierunku obciążenia i dwóch krawędziach swobodnych, równoległych do kierunku obciążenia oraz swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach. Przypadek pierwszy spotykany jest w typowym teście ECT, gdzie próbka zginiata jest krawędziowo pomiędzy sztywnymi płytami (rys. 1). Przypadek drugi natomiast dotyczy wyciętej myślowo ścianki warstwy zewnętrznej tektury falistej (rys. 1) lub całej ściany bocznej opakowania w teście BCT.

W dalszej części pracy w dużym skrócie zaprezentowano proces homogenizacji, niezbędny do wyznaczenia zastępczych parametrów przekroju, a na końcu przedstawiono kilka przykładów porównujących dokładność prezentowanych metod.

Stformułowanie zagadnienia

Metoda analityczna wyznaczania siły krytycznej oparta jest na teorii sprężystych płyt ortotropowych. Równanie różniczkowe, opisujące zginanie jednowarstwowej ortotropowej płyty obciążonej na jednej z krawędzi siłą równomiernie rozłożoną, przy jednoczesnym pominięciu sprzężenia między zginaniem i ściskaniem, można zapisać w następujący sposób (6, 7):

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \quad [1]$$

W przypadku gdy kierunki ortotropii są równoległe do krawędzi płyty oraz przy założeniu, że $N_{xy} = N_y = 0$, równanie [1] upraszcza się do:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad [2]$$

gdzie: D_{ij} są składowymi macierzy sztywności na zginanie [D]:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [3]$$

W przypadku swobodnego podparcia płyty tylko na dwóch obciążonych krawędziach (rys. 1b), uproszczenie kształtu wybożenia (ugięcia) uwzględniające warunki brzegowe na obciążonych krawędziach można przedstawić za pomocą wzoru:

$$w(x) = A_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad [4]$$

gdzie A_m jest amplitudą ugięcia, m jest liczbą półfal, natomiast a jest długością przekroju w kierunku obciążenia. W tym przypadku wszystkie pochodne względem zmiennej y są równe zero, przez co równanie różniczkowe [2] upraszcza się do:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad [5]$$

Podstawiając równanie [4] do równania [5] można wyznaczyć siłę krytyczną dla ($m=1$)

$$N_x^{cr} = D_{11} \frac{\pi^2}{a^2} \quad [6]$$

W przypadku podparcia swobodnego na wszystkich krawędziach (rys. 1c) kształt wybożenia (ugięcia) płyty można aproksymować następującą funkcją:

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad [7]$$

gdzie A_{mn} jest amplitudą ugięcia, n liczbą półfal w kierunku prostopadłym do obciążenia, natomiast b jest szerokością próbki w kierunku prostopadłym do obciążenia. Podstawiając równanie [7] do równania [2], można wyznaczyć siłę krytyczną:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2} \left(D_{11} \frac{m^2 b^2}{a^2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) n^2 + D_{22} \frac{a^2 n^4}{m^2 b^2} \right) \quad [8]$$

gdzie zmienne m oraz n są dobrane w taki sposób, aby minimalizować wartość siły krytycznej (N). Ponieważ zmienna n pojawia się tylko w liczniku równania [8], minimum przypada dla $n=1$.



W przypadku izotropowej płyty sztywności:

$$D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [9]$$

przez co równanie [6] przyjmuje postać:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{a^2} D \quad [10]$$

natomiast równanie [8] upraszcza się do postaci:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2} D \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad [11]$$

Gdy rozpatrujemy płyty izotropowe o równych bokach (dla $m=1$) siła krytyczna wynosi:

$$N_x^{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} = \frac{4\pi^2 E h^3}{12b^2(1-\nu^2)} \quad [12]$$

Wyprowadzone powyżej zależności opisujące siły krytyczne, które powodują utratę stateczności lokalnej/globalnej otrotropowej płyty nie uwzględniają niestety periodycznego rdzenia tektury falistej. Sztywność $[D]$ wykorzystywana we wzorach [1-8] jest wielkością zhomogenizowaną (uśrednioną) a priori, a jej poprawne wyznaczenie jest kluczem do precyzyjnego oszacowania siły krytycznej. Homogenizacja przekroju tektury falistej była już omawiana w poprzednich pracach autorów (8, 9), dlatego tutaj zostanie tylko omówiona główna idea metody.

Aby poprawnie zhomogenizować np. 3-warstwowy przekrój tektury falistej, należy w pierwszej kolejności wyznaczyć macierz sztywności $[ABD]$ wszystkich warstw przekroju z równania:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} = \sum_i \frac{1}{P} \int_0^P \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathbf{Q}_i \{1, z, z^2\} dz dx \quad [13]$$

gdzie: macierz $[A]$ jest sztywnością na rozciąganie, macierz $[D]$ jest sztywnością na zginanie, macierz $[C]$ jest macierzą sprzęgającą obie sztywności, natomiast \mathbf{Q}_i jest macierzą sztywności materiałowej i -tej warstwy. Dla i -tej warstwy tektury falistej macierz \mathbf{Q}_i przyjmuje postać:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \frac{E_1^i}{1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i} & \frac{E_1^i \nu_{21}^i}{1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i} & 0 \\ \frac{E_2^i \nu_{12}^i}{1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i} & \frac{E_2^i}{1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^i \end{bmatrix} \quad [14]$$

gdzie: E_1^i jest modułem sztywności podłużnej i -tej warstwy w kierunku poprzecznym (CD), E_2^i jest modułem sztywności podłużnej i -tej warstwy w kierunku maszynowym (MD), ν_{12}^i oraz ν_{21}^i są współczynnikami Poissona i -tej warstwy, natomiast G_{12}^i jest modułem sztywności poprzecznej i -tej warstwy.

Całkując poszczególne warstwy przekroju i sumując odpowiednie składowe sztywności poszczególnych warstw tektury falistej zgodnie ze wzorem [13] możemy ostatecznie wyznaczyć macierz $[ABD]$:

$$\mathbf{ABD} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad [15]$$

W kolejnym kroku można obliczyć zastępczą grubość efektywną z równania:

$$h = \sqrt{12 \frac{\sum_{i=1}^3 D_{ii}}{\sum_{i=1}^3 A_{ii}}} \quad [16]$$

Efektywne parametry zastępcze wyznaczamy z równania:

$$\mathbf{A} = h\mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^A, \bar{E}_{CD}^A, \bar{G}_{MDCD}^A, \bar{\nu}_{MDCD}^A \quad [17a]$$

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12}\mathbf{Q} \rightarrow \bar{E}_{MD}^D, \bar{E}_{CD}^D, \bar{G}_{MDCD}^D, \bar{\nu}_{MDCD}^D \quad [17b]$$

natomiast efektywne wartości średnie z równania:

$$\bar{E}_{MD} = \frac{1}{2}(\bar{E}_{MD}^A + \bar{E}_{MD}^D), \quad \bar{E}_{CD} = \frac{1}{2}(\bar{E}_{CD}^A + \bar{E}_{CD}^D) \quad [18a]$$

$$\bar{G}_{MDCD} = \frac{1}{2}(\bar{G}_{MDCD}^A + \bar{G}_{MDCD}^D), \quad [18b]$$

$$\bar{\nu}_{MDCD} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_{MDCD}^A + \bar{\nu}_{MDCD}^D)$$

W przypadku zagadnień utraty stateczności macierz $[A]$ nie musi być wyznaczona i można przyjąć grubość zastępczą równą faktycznej grubości tektury falistej. Jednakże rozwiązanie takie, zdaniem autorów, wprowadza dodatkowe uproszczenia i błędy aproksymacji, które mogą znacznie zniekształcić wyniki analiz numerycznych, szczególnie gdy model poddawany jest różnym kombinacjom obciążeń (nie tylko analizie utraty stateczności). Dodatkowo, jeżeli przekrój tektury falistej jest niesymetryczny, to macierz $[B]$, sprzęgająca sztywność na rozciąganie ze sztywnością na zginanie, będzie miała wartości niezerowe, co wymaga wprowadzenia dodatkowej korekty do macierzy sztywności na zginanie $[D]$, zgodnie z zależnością:

$$[\mathbf{D}^*] \approx [\mathbf{D}] - [\mathbf{B}][\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{B}] \quad [19]$$



Modele obliczeniowe

W celu przeprowadzenia kompleksowego porównania wyników otrzymanych różnymi metodami, została wykonana seria testów numerycznych ECT (*Edge Crush Test*) na niestandardowych próbkach o wymiarach:

- 25x100mm,
- 50x100mm,
- 75x100mm,
- 100x100mm

Wszystkie próbki wykonano z tektury 3-warstwowej w następującej konfiguracji:

- Model E (typ fali E):
warstwa zewnętrzna – TL 3120,
warstwa pofalowana – W 100,
warstwa wewnętrzna – TL3 120,
wysokość przekroju: 1.4 mm
podziałka (okres) fali: 3.3 mm
- Model B (typ fali B):
warstwa zewnętrzna – TL3 120,
warstwa pofalowana – W 100,
warstwa wewnętrzna – TL3 120
wysokość przekroju: 2.6 mm
podziałka (okres) fali: 6.0 mm
- Model C (typ fali C):
warstwa zewnętrzna – KP2 135,
warstwa pofalowana – W 110,
warstwa wewnętrzna – TL3 135,
wysokość przekroju: 3.5 mm
podziałka (okres) fali: 7.5 mm

Parametry materiałowe wszystkich trzech modeli E, B, C zestawiono w tabelach 1-9.

Tabela 1. Model E – parametry materiałowe i grubości poszczególnych papierów składowych

Warstwa	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	ν_{21} [-]	G_{12} [MPa]	Grubość [mm]
warstwa zewnętrzna	5280	1824	0.17	1201	0.25
warstwa pofalowana	4783	1652	0.17	1088	0.23
warstwa wewnętrzna	5280	1824	0.17	1201	0.25

Tabela 2. Model E – parametry materiałowe [18] i grubości modelu zastępczego [16]

\bar{E}_1 [MPa]	\bar{E}_2 [MPa]	$\bar{\nu}_{21}$ [-]	\bar{G}_{12} [MPa]	Grubość [mm]
1195	511	0.17	267	2.34

Tabela 3. Model E – wartości wybranych komponentów macierzy sztywności A oraz B [13]

A_{11}	A_{22}	A_{12}	A_{66}	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{66}
1453	2889	498	601	528	1430	247	297

Tabela 4. Model B – parametry materiałowe i grubości poszczególnych papierów składowych

Warstwa	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	ν_{21} [-]	G_{12} [MPa]	Grubość [mm]
warstwa zewnętrzna	5280	1824	0.17	1201	0.25
warstwa pofalowana	4783	1652	0.17	1088	0.23
warstwa wewnętrzna	5280	1824	0.17	1201	0.25

Tabela 5. Model B – parametry materiałowe [18] i grubości modelu zastępczego [16]

\bar{E}_1 [MPa]	\bar{E}_2 [MPa]	$\bar{\nu}_{21}$ [-]	\bar{G}_{12} [MPa]	Grubość [mm]
646	289	0.17	144	4,34

Tabela 6. Model B – wartości wybranych komponentów macierzy sztywności A oraz B [13]

A_{11}	A_{22}	A_{12}	A_{66}	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{66}
1500	2889	498	601	1905	4897	844	1018

Tabela 7. Model C – parametry materiałowe i grubości poszczególnych papierów składowych

Warstwa	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	ν_{21} [-]	G_{12} [MPa]	Grubość [mm]
warstwa zewnętrzna	4889	1689	0,17	1112	0,27
warstwa pofalowana	4583	1583	0,17	1042	0,24
warstwa wewnętrzna	4889	1689	0,17	1112	0,27

Tabela 8. Model C – parametry materiałowe [18] i grubości modelu zastępczego [16]

\bar{E}_1 [MPa]	\bar{E}_2 [MPa]	$\bar{\nu}_{21}$ [-]	\bar{G}_{12} [MPa]	Grubość [mm]
481	219	0,17	107	5,83

Tabela 9. Model C – wartości wybranych komponentów macierzy sztywności A oraz B [13]

A_{11}	A_{22}	A_{12}	A_{66}	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{66}
1526	2887	497	600	3514	8860	1524	1843

Wartości parametrów materiałowych poszczególnych warstw wyznaczono na podstawie specyfikacji technicznych firmy Mondi, która określa tzw. *Tensile Stiffness Index (TSI)* dla poszczególnych papierów zarówno w kierunku podłużnym (TSI_{MD}), jak



i w poprzecznym (TSI_{CD}). Znając TSI , gramaturę tektury (g_i) oraz jej grubość (t_i), można łatwo wyznaczyć sztywność podłużną poszczególnych papierów w kierunku MD oraz CD:

$$E_1^i = \frac{TSI_{MD}^i g_i}{t_i}, \quad E_2^i = \frac{TSI_{CD}^i g_i}{t_i} \quad [20]$$

następnie można wyliczyć z uproszczonych równań (10) sztywność poprzeczną (G_{12}^i) poszczególnych papierów oraz współczynniki Poissona:

$$\nu_{12}^i \cong 0.293 \sqrt{\frac{E_1^i}{E_2^i}}, \quad \nu_{21}^i = \frac{E_2^i}{E_1^i} \nu_{12}^i \quad [21a]$$

$$G_{12}^i \cong \frac{\sqrt{E_1^i E_2^i}}{2 \left(1 + \sqrt{\nu_{12}^i \nu_{21}^i} \right)} \cong 0.387 \sqrt{E_1^i E_2^i} \quad [21b]$$

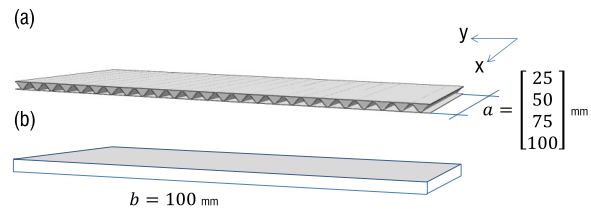
Do wszystkich analiz numerycznych wykorzystano pakiet obliczeniowy „FEMAT cardboard” firmy FeMat Soft s.c. (11). Do obliczeń wybrano elementy powłokowe 4-węzłowe, liniowe z pełnym całkowaniem z 5 stopniami swobody w każdym węźle. Zagadnienie utraty stateczności (*buckling analysis*) rozwiązano za pomocą iteracyjnego algorytmu typu „Lanchos” do zagadnień własnych dużych macierzy rzadkich, zaimplementowanego w programie FEMAT. Modele strukturalne zawierają od ok. 6000 do ok. 24000 elementów, natomiast modele zhomogenizowane zawierają od ok., 1500 do ok. 6000 elementów (w zależności od wysokości przekroju próbki). Pojedyncza analiza na komputerze z procesorem i7 z 8 GB RAM trwa od 7 sekund dla modelu zhomogenizowanego próbki 25x100 mm do ok. 100 sekund dla modelu strukturalnego próbki 100x100 mm.

W pracy porównano rozwiązanie analityczne z wynikami analizy numerycznej trzech modeli FEM:

- Wariant 1 – pełny model strukturalny FEM (rys. 2a).
- Wariant 2 – zhomogenizowany model FEM, w którym grubość zastępczą wyznaczono z równania [16], natomiast parametry efektywne z równania [18] (rys. 2b).
- Wariant 3 – zhomogenizowany model FEM, w którym macierze **[A]**, **[B]** oraz **[D]** wyznaczone z równania [13] wykorzystano bezpośrednio w definicji sztywności w programie FEMAT (rys. 2b).
- Wariant 4 – rozwiązanie analityczne na podstawie wzoru [6] lub [8].

Wariantu 3 nie da się zastosować w każdym komercyjnym programie, ponieważ w programach tych często wymagane jest przygotowanie zestawu parametrów efektywnych sztywności

materiałowej modelu zhomogenizowanego [17] lub [18], a nie bezpośrednio macierzy **[ABD]** [13].



Rys. 2. Modele numeryczne testu ECT: (a) model strukturalny (wariant 1), (b) model zhomogenizowany (wariant 2 oraz 3)

Wyniki i dyskusja

W tabelach 10-12 zestawiono wszystkie wyniki globalnej analizy utraty stateczności:

- Model E (tab. 10),
- Model B (tab. 11),
- Model C (tab. 12)

w wariantach 1-4 dla próbek o wymiarach 25x100, 50 x100, 75x100, 100x100.

Tabela 10. Siła krytyczna powodująca globalną utratę stateczności próbki wykonanej z fali typu E

Wymiar próbki	Siła krytyczna N_x^{cr} [N/m]			
	25x100	50x100	75x100	100x100
Model E-1 (ref)	831,72	217,54	96,82	52,14
Model E-2 [18]	890,16	201,01	99,10	55,34
Model E-3 [13]	803,48	224,25	88,51	49,36
Model E-4 [6]	834,07	208,51	92,67	52,13

Tabela 11. Siła krytyczna powodująca globalną utratę stateczności próbki wykonanej z fali typu B

Wymiar próbki	Siła krytyczna N_x^{cr} [N/m]			
	25x100	50x100	75x100	100x100
Model B-1 (ref)	-	702,64	321,20	181,67
Model B-2 [18]	3058,90	796,00	354,13	198,27
Model B-3 [13]	2737,58	714,61	317,49	177,69
Model B-4 [6]	3007,79	751,97	334,21	188,00

Tabela 12. Siła krytyczna powodująca globalną utratę stateczności próbki wykonanej z fali typu C

Wymiar próbki	Siła krytyczna N_x^{cr} [N/m]			
	25x100	50x100	75x100	100x100
Model C-1 (ref)	-	1232,00	575,75	328,15
Model C-2 [18]	5362,90	1445,70	647,94	363,81
Model C-3 [13]	4752,00	1296,37	581,48	326,63
Model C-4 [6]	5549,16	1387,29	616,57	346,82

Tabela 13 przedstawia wyniki analizy lokalnej utraty stateczności ścianki próbki o wymiarach 25x100. Ścianka ma wymiar $25 \times P$, gdzie P jest podziałką (okresem) fali i wynosi odpowiednio:

- Model-E, $P = 3,3$ mm,
- Model-B, $P = 6,0$ mm,
- Model-C, $P = 7,5$ mm.

Jeżeli wartości zestawione w tabeli 13 są mniejsze od odpowiadających wartości w tabelach 10-11, to w analizowanym modelu najpierw będzie miało miejsce wyoboczenie lokalne. Sytuacja taka wystąpiła w przypadku Modelu-B1 oraz Modelu-C1, czyli dla typowych próbek testu ECT. W przypadkach tych dochodzi do faktycznego zgniecenia krawędzi, czyli aktywowane są procesy nieliniowe materiałowe.

Tabela 13. Siła krytyczna powodująca lokalną utratę stateczności dla próbki o wymiarach 25x100

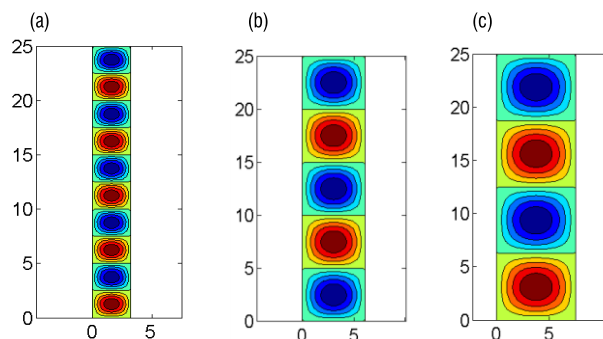
	Siła krytyczna N_{cr} [N/m]		
Wariant / Model	Model E	Model B	Model C
Wariant 3 [13]	4911,76	1550,77	1159,99
Wariant 4 [8]	5141,81	1571,34	1171,83

Na rysunku 3 przedstawiono lokalne postaci wyoboczeniowe ścianki modelu tekstury falistej. Na rysunku widać, że ilość półfal w modelu z relatywnie krótkim okresem fali jest znacznie większa niż w modelu z dłuższym okresem P , przez co wartość siły krytycznej jest znacznie większa dla ścianki w Modelu-E niż w Modelu-B i C.

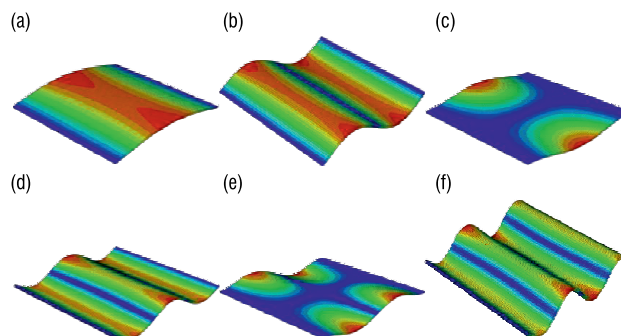
Na rysunkach 4-5 pokazano przykładowe wyniki globalnej analizy utraty stateczności Modelu-E (w wariantach 1 i 3) próbki o wymiarach 100x100. Przedstawione postaci wyoboczenia i odpowiadające im wartości siły krytycznej na obu rysunkach są zgodne dla pierwszych sześciu modeli, a maksymalne rozbieżności nie przekraczają 10%.

Wszystkie wyniki zaprezentowane w pracy i zestawione w tabelach 10-12, pomimo pewnych rozbieżności zauważalnych dla wybranych wariantów modeli numerycznych, generalnie są zbieżne. Siły krytyczne wyznaczone za pomocą modelu w wariantach 3 (FeMat) oraz 4 (model analityczny) mają wartości najbliższe wartościom referencyjnym (pełny model strukturalny – wariant 1) i mogą być stosowane zamiennie. Poważnym ograniczeniem modelu analitycznego jest jednak potrzeba modyfikacji rozwiązania, jeżeli założenia dotyczące warunków brzegowych ulegną zmianie. Ta sama zmiana warunków brzegowych w modelu numerycz-

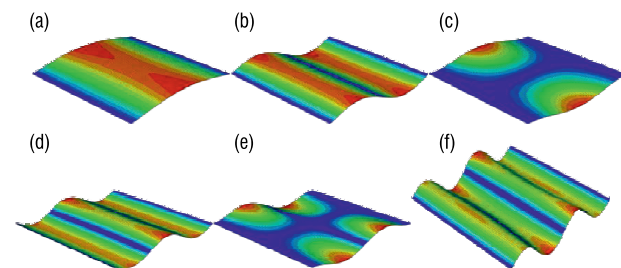
nym nie wprowadza żadnych dodatkowych komplikacji. Wyniki generowane przez model w wariantach 2 są najmniej stabilne, co jest wynikiem nieznacznego zwiększenia sztywności na zginanie poprzez uśrednianie parametrów efektywnych zastosowane w równaniu [18]. Wyniki te można znacznie poprawić stosując zamiast uśrednionych wartości parametrów efektywnych, parametry wyznaczone z równania [17b] (kosztem pogorszenia jakości wyników w innych stanach obciążenia).



Rys. 3. Postaci lokalnej utraty stateczności dla próbki o wymiarze 25x100: (a) Model-C3, $N_{cr} = 1160,0$ N/m, (b) Model-B3, $N_{cr} = 1550,7$ N/m, (c) Model-E3, $N_{cr} = 4911,7$ N/m



Rys. 4. Postaci wyoboczenia 1-6 pełnego modelu strukturalnego oraz odpowiadające im siły krytyczne: (a) 52,1, (b) 209,6, (c) 345,9, (d) 464,7, (e) 554,3, (f) 804,9 [N/m]



Rys. 5. Postaci wyoboczenia 1-6 modelu zhomogenizowanego oraz odpowiadające im siły krytyczne: (a) 55;3, (b) 224.5, (c) 360.4, (d) 506.1, (e) 594.5, (f) 897.1 [N/m]



Podsumowanie i wnioski

Zaprezentowane w pracy metody wyznaczania siły krytycznej, która powoduje lokalną lub globalną utratę stateczności opakowań wykonanych z tektury falistej, oparte są na modelach numerycznych oraz prostych rozwiązaniach analitycznych. Niestety, rozwiązania analityczne wyprowadzone są tylko dla pewnej grupy zagadnień związanych ze statecznością ortotropowych płyt z periodycznym rdzeniem, dlatego rozwiązania numeryczne wydają się bardziej uniwersalne. Autorzy ograniczyli się do analizy liniowej, bez uwzględniania zachowania modelu w fazie pokrytycznej. Również nieliniowości materiałowe zostały pominięte w pracy.

Najważniejsze wnioski, jakie narzucają się po przeprowadzonych analizach są następujące:

- równania analityczne, wyprowadzone dla dwóch przypadków podparcia ortotropowej płyty, pozwalają oszacować z dużą dokładnością siłę krytyczną powodującą globalną utratę stateczności a także lokalne efekty wyboczenia ścianek tektury falistej,
 - niestety, każda zmiana warunków brzegowych lub sposobu obciążenia w modelu implikuje pełne przebudowanie rozwiązania,
 - model strukturalny FEM posłużył w pracy jako referencyjny, ponieważ wyniki otrzymane za pomocą tego modelu są najbardziej dokładne,
 - minusy modelu strukturalnego to duża pracochłonność w fazie przygotowania modelu oraz dość długi czas obliczeń,
- modele FEM oparte na homogenizacji są najbardziej uniwersalne, charakteryzują się łatwością przygotowania modelu, krótkim czasem analizy oraz średnią lub dużą dokładnością rozwiązania (w zależności od wybranej metody homogenizacji).

LITERATURA

1. Garbowski T., Jarmuszczyk M.: "Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 1. Theoretical Assumptions in Numerical Modeling of Paperboard Packages", *Przegl. Papiern.* **70**, 4, 219-222 (2014).
2. Garbowski T., Jarmuszczyk M.: "Numerical Strength Estimate of Corrugated Board Packages Part 2. Experimental Tests and Numerical Analysis of Paperboard Packages", *Przegl. Papiern.* **70**, 5, 277-281 (2014).
3. Łęcka M., Mania R., Marynowski K.: "New Method of the Compressive Strength of Corrugated Board Determination", *Przegl. Papiern.* **62**, 3, 150-153 (2006).
4. Łęcka M., Mania R., Marynowski K.: "New Method of the ECT Index of Corrugated Board Determination", *Przegl. Papiern.* **62**, 4, 207-210 (2006).
5. Szewczyk W., Kowalski L.: "Komputerowe wspomaganie projektowania opakowań z tektury", *Opakowanie*, 4, 69-72 (2012).
6. Timoshenko S.P., Gere J.M.: "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, 1963.
7. Ventsel E., Krauthammer T.: "Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications", Marcel Dekker, Inc., New York 2001.
8. Garbowski T., Jarmuszczyk M.: "Homogenization of Corrugated Board. Part 1. Analytical Homogenization", *Przegl. Papiern.* **70**, 6, 345-349 (2014).
9. Garbowski T., Jarmuszczyk M.: "Homogenization of Corrugated Board. Part 2. Numerical Homogenization", *Przegl. Papiern.* **70**, 7, 390-394 (2014).
10. Baum G.A., Brennan D.C., Habeger C.C.: "Ortotropic Elastic Constants of Paper", *Tappi J.* **64**, 8, 97-101 (1981).
11. <http://www.fematsoft.com>

