



Komputerowo wspomagane wyznaczanie nośności opakowań z tektury falistej

Cz. 3. Laboratoryjno-numeryczna procedura identyfikacji sprężystych parametrów materiałowych tektury falistej

Computer aided estimation of corrugated board box compression strength

Part 3. Laboratory-numerical procedure for an identification of elastic properties of corrugated board

TOMASZ GARBOWSKI, LUCYNA GARBOWSKA

DOI: 10.15199/54.2018.9.2

Wiarygodne szacowanie nośności konstrukcji z papieru oraz tektury (np. pudła klapowe, SRP/RRP itp.) oparte jest przede wszystkim na precyzyjnie zidentyfikowanym zestawie parametrów wytrzymałościowych oraz odpowiednim modelu matematycznym z poprawnie sformułowanymi równaniami konstytutywnymi materiału. W niniejszej pracy zestawiono i omówiono techniki doboru odpowiednich metod identyfikacji parametrów materiałowych tektury falistej. Problem ten jest szczególnie ważny w przypadku testów wytrzymałościowych tektury falistej, ponieważ w laboratorium najczęściej mierzone są przemieszczenia i/lub wyężenia próbek tektury o różnych kształtach i wymiarach, a nie bezpośrednio szukane parametry materiałowe, które wyznacza się a posteriori z równań matematycznych. Ponadto, konstytutywny opis tektury falistej zawiera aż kilkanaście parametrów materiałowych, przez co wyselekcjonowanie odpowiednich testów laboratoryjnych niezbędnych do ich wyznaczenia jest dodatkowo utrudnione. W poprzednich artykułach cyklu omówiono zagadnienia dotyczące warunków pracy tektury, sprawdzono wpływ procesów przetwórczych na wytrzymałość tektury oraz opisano metody sprawdzania przydatności testów laboratoryjnych do identyfikacji w oparciu o analizę wrażliwości. W bieżącym artykule porównano skuteczność wykorzystania algorytmów optymalizacji i metod odwrotnych w procesie identyfikacji parametrów materiałowych tektury falistej. Porównano i zestawiono również wyniki identyfikacji dla różnych kombinacji zestawów badań laboratoryjnych.

Słowa kluczowe: tektura falista, analiza odwrotna, parametry mechaniczne, testy laboratoryjne

Reliable estimation of the bearing capacity of paper and board structures (e.g. flap boxes, SRP / RRP, etc.) is based primarily on a precisely identified set of strength parameters and an appropriate mathematical model with correctly formulated material constitutive equations. In this paper, techniques for selection of appropriate methods for identification of corrugated board material parameters are presented and discussed. This problem is particularly important in the case of strength tests of corrugated board, because in the laboratory the displacements and / or strains of board samples of various shapes and sizes are most often measured, and not directly the material parameters, that are determined a posteriori from mathematical equations. In addition, the constitutive description of corrugated board contains dozen material parameters, which makes it difficult to select the appropriate laboratory tests, necessary to determine them. In the previous articles of the series, issues related to the work conditions of board were discussed, the impact of material processing on the strength of board was examined and methods for testing the suitability of laboratory tests for identification based on sensitivity analysis were described. The current article examines the effectiveness of using optimization algorithms and inverse methods in the process of identification of corrugated board material parameters. The identification results for various combinations of laboratory tests were also compared and summarized.

Keywords: corrugated board, inverse analysis, mechanical properties, laboratory tests

Dr inż. **T. Garbowski** (tomasz.garbowski@put.poznan.pl), Politechnika Poznańska, Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; mgr **L. Garbowska** (lucyna.garbowska@femat.biz), FEMat Sp. z o.o., ul. Romana Maya 1, 61-371 Poznań



Wprowadzenie

Proces numerycznego wyznaczania wytrzymałości konstrukcji (np. opakowań z tektury falistej) składa się z następujących etapów: określenie warunków, w jakich pracuje konstrukcja; wyselekcjonowanie wszystkich niezbędnych parametrów konstrukcji, które należy określić lub zidentyfikować; wybranie odpowiednich testów laboratoryjnych, metod pomiarowych oraz technik identyfikacji do ich prawidłowego wyznaczenia; dobranie efektywnych technik obliczeniowych; zaprojektowanie konstrukcji; wykonanie obliczeń oraz zinterpretowanie wyników. Jednym z najważniejszych kroków w tym procesie jest identyfikacja parametrów modelu. W przypadku materiałów izotropowych z klasycznym warunkiem plastyczności Hubera-Misesa (tj. stal, aluminium itp.), do pełnego opisu sprężysto-plastycznego materiału wystarczy wykonać test rozciągania lub ściskania próbki. W przypadku tektury falistej liczba testów niezbędnych do identyfikacji kompletnego zestawu parametrów materiałowych jest znacznie większa. Powodem jest włóknista struktura papieru, która jest główną przyczyną powstawania tzw. kierunkowości właściwości mechanicznych (ortotropii) papieru oraz tektury litej (tj. głównych składników tektury falistej), opisywanej np. [11, 14, 15, 16, 17, 18, 22]. Aby poprawnie zidentyfikować parametry tektury falistej, należy wykonać serię specyficznych testów laboratoryjnych. Poza tym potrzebna jest również skuteczna procedura obliczania szukanych parametrów na podstawie otrzymanych wyników [27, 28]. Procedura wyznaczania parametrów mechanicznych w materiałach izotropowych (np. wspomniana już stal czy aluminium) jest relatywnie prosta. Ich wyznaczenie opiera się wyłącznie na odpowiedniej interpretacji wyników laboratoryjnych – należy przeskalać otrzymane wartości i określić szukane parametry bezpośrednio z wykresów. Niestety, proste procedury identyfikacji nie mają bezpośredniego zastosowania w przypadku tektury falistej, ponieważ: w większości standardowych testów wytrzymałościowych tektury falistej aktywnych jest więcej niż jeden parametr materiałowy oraz w różnych testach laboratoryjnych parametry te aktywne są w różnym stopniu, co oczywiście zależy od konfiguracji testu (problem szeroko omawiany w pracy [13]).

Bezpośrednie wyznaczanie parametrów materiałowych tektury falistej wymaga wyizolowania aktywnych parametrów w każdym teście laboratoryjnym. Niestety, nie jest to praktyczne podejście, ponieważ do pełnego opisu konstytutywnego tektury falistej (tylko w fazie sprężystej) wymaganych jest dziewięć parametrów – należy więc zaprojektować i wykonać aż 9 specjalistycznych testów. Poprawne zaprojektowanie i wykonanie testów wytrzymałościowych tektury falistej z wyizolowanymi parametrami jest bardzo trudne, z uwagi na specyficzną budowę tektury falistej. Przekrój poprzeczny tektury falistej złożony jest z płaskich i pofalowanych warstw tektury litej, co sprawia, że wyniki pomiarów nawet w standardowych testach zależą od parametrów materiałowych oraz od struktury warstw pofalowanych. Bardziej praktyczna metoda

Introduction

The process of numerical estimation of the strength of a structure (e.g. corrugated board packaging) consists of the following steps: defining the conditions under which the structure works; selecting all the necessary construction parameters that must be selected or identified; selecting appropriate laboratory tests, measurement methods and identification techniques for their proper determination; selecting effective computational techniques; designing the structure; performing calculations and interpreting results. One of the most important steps in this process is to identify model parameters. In the case of isotropic materials with the classic Huber-Mises plasticity condition (i.e. steel, aluminum, etc.), it is sufficient to perform a tensile or compression test of the sample to fully describe the elastic-plastic material. In the case of corrugated board, the number of tests necessary to identify a complete set of material parameters is much greater. The reason is the fibrous structure of paper, which is the main cause of the so-called directivity of mechanical properties (orthotropy) of paper and paperboard (i.e. the main components of corrugated board), described e.g. [11, 14, 15, 16, 17, 18, 22]. To correctly identify corrugated board parameters, a series of specific laboratory tests should be performed. In addition, an effective procedure for calculating the sought parameters based on the obtained results is also needed [27, 28]. The procedure for determining mechanical parameters in isotropic materials (e.g. the already mentioned steel or aluminum) is relatively simple. Their determination is based only on the appropriate interpretation of laboratory results – one should scale the received values and determine the sought parameters directly from the charts. Unfortunately, simple identification procedures are not directly applicable to corrugated board because: more than one material parameter is active in most standard corrugated board strength tests; in various laboratory tests, these parameters are active to certain degree, which, of course, depends on the test configuration (the problem discussed extensively in [13]).

Direct determination of material parameters of corrugated board requires the isolation of active parameters in each laboratory test. Unfortunately, this is not a practical approach, because nine parameters are required for a full description of the constitutive model of corrugated board (only in the elastic phase) – so 9 special tests should be designed and made. Correct design and performance of corrugated board strength tests with isolated parameters is very difficult due to the specific construction of corrugated board. The cross-section of corrugated board is composed of flat and wavy layers (flute) of paperboard, which makes the measurement results even in standard tests dependent on material parameters and the structure of flute. A more practical identification method of the parameters of corrugated board is based on just few, much simpler to design, standard strength tests, which contain a various



określania parametrów tektury falistej oparta jest na wykonaniu tylko kilku, dużo prostszych pomiarów, korzystając z procedur opartych na analizie odwrotnej, symulacjach komputerowych oraz algorytmach optymalizacyjnych.

Procedura identyfikacji parametrów materiałowych w pigułce

Analizy odwrotne mają szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i inżynierii [6, 9, 10, 19, 21, 23, 33]. W przypadku testów wytrzymałościowych, gdzie często poszukiwane parametry modelu nie są bezpośrednio związane z mierzonymi wielkościami, wymagane jest zastosowanie numerycznych modeli tych testów. Modele te służą do emulowania prawdziwego eksperymentu, zawierają szukane parametry i umożliwiają przeprowadzenie pełnej symulacji wybranego testu wytrzymałościowego, np. w celu obliczenia numerycznego przemieszczenia lub wyężenia próbki. Poprzez zmianę parametrów materiałowych w modelu numerycznym możliwa jest kontrolowana zmiana obliczanych przemieszczeń. Automatyczne dopasowanie szukanych parametrów w modelu komputerowym prowadzi do iteracyjnej metody minimalizacji (optymalizacji), pozwalającej na uzyskanie zestawu parametrów, dla którego różnica między pomiarami otrzymanymi z fizycznego eksperymentu i jego symulacji jest minimalna. Jeżeli w obu przypadkach przyłożone jest identyczne obciążenie i uzyskuje się taką samą odpowiedź, to można założyć, że oba modele mają takie same parametry. Czyli wyznaczony w procesie minimalizacji zestaw parametrów w modelu numerycznym jest, z dużym prawdopodobieństwem, zestawem poszukiwanych parametrów materiałowych w modelu fizycznym.

W części 2 niniejszego cyklu [13] autorzy przedstawili wyniki analizy wrażliwości w wybranych testach laboratoryjnych. Na podstawie przeprowadzonych badań wyciągnięto m.in. wniosek, że im większa wrażliwość otrzymanych wyników na zmiany wartości parametrów modelu, tym większa szansa, że parametry te zostaną zidentyfikowane w procedurze odwrotnej. Wynika z tego, że w procedurze identyfikacji ważną rolę odgrywa eksperyment. Dobrze zaprojektowany eksperyment, w którym aktywna jest możliwie największa liczba poszukiwanych parametrów, z wystarczająco wysokim „stopniem aktywności”, jest jednak tylko jednym z warunków, niezbędnym do poprawnej identyfikacji tych parametrów. Kolejnym ważnym elementem efektywnej procedury odwrotnej jest poprawny model numeryczny do symulacji komputerowych wybranego testu laboratoryjnego. Model powinien odzwierciedlać możliwie szczegółowo fizyczny eksperyment. W literaturze naukowej można znaleźć wiele przykładów modeli konstytutywnych papieru i tektury [4, 5, 24, 25, 26, 29, 30, 31] – wybór zależy od wymaganego stopnia dokładności odwzorowania oraz skali w jakiej przeprowadza się eksperyment.

Ostatnim, niezbędnym elementem stabilnej procedury identyfikacji jest szybki i niezawodny algorytm do minimalizacji funkcji celu (optymalizacji). Wybór odpowiedniego algorytmu w głównym

number of sought parameters. Then, based on the obtained results, it is possible to calculate sought parameters a posteriori, using procedures using an inverse analysis, computer simulations and optimization algorithms.

Material parameter identification procedure at a glance

Inverse analyzes are widely used in many fields of science and engineering [6, 9, 10, 19, 21, 23, 33]. In the case of strength tests, where often the sought model parameters are not directly related to the measured quantities, the numerical models of these tests are required. These models are used to emulate a real experiment, contain the sought parameters and enable a full simulation of a selected strength test, e.g. calculation of the numerical displacement or strains of a sample. By changing the material parameters in the numerical model, a controlled update of the calculated displacements is possible. Automatic adjustment of the sought parameters in the computer model leads to an iterative minimization method (optimization), which allows to obtain a set of parameters for which the difference between the measurements obtained from the physical experiment and its simulation is minimal. If in both cases an identical load is applied and the same answer is obtained, it can be assumed that both models have the same parameters. So the set of parameters determined in the minimization process from the numerical model is, with a high probability, a set of sought material parameters in the physical model.

In part 2 of this series [13] the results of the sensitivity analysis in selected laboratory tests were presented. Based on the research carried out, among others the conclusion is that the higher the sensitivity of the experimental results with respect to the model parameters, the greater the chance that these parameters will be identified in the inverse procedure. It follows that the experiment plays an important role in the identification procedure. A well-designed experiment in which the largest possible number of sought parameters is active with a sufficiently high “degree of activity”, however, is only one of the conditions necessary to correctly identify these parameters. Another important ingredient of the effective inverse procedure is the correct numerical model for computer simulations of the selected laboratory test. The model should reflect the physical experiment as closely as possible. In the scientific literature, there are many examples of constitutive models of paper and cardboard [4, 5, 24, 25, 26, 29, 30, 31] – the choice depends on the degree of required accuracy and the scale in which the experiment is carried out.

The last and necessary element of a stable identification procedure is a fast and reliable algorithm for minimization of the objective function (optimization). Choosing the right algorithm depends mainly on the objective function. The more “demanding” function, e.g. nonconvex, (i.e. with many local extremes), discon-



stopniu zależy od funkcji celu. Im bardziej „wymagająca” funkcja, np. nieregularna, (tj. z wieloma lokalnymi ekstremami), nieciągła itp., tym proces identyfikacji jest trudniejszy, co wiąże się z potrzebą wykorzystania bardziej zaawansowanych algorytmów. Do funkcji ciągłych i wypukłych najczęściej stosuje się algorytmy gradientowe, do funkcji nieciągłych lub nieregularnych – algorytmy ewolucyjne (np. algorytmy genetyczne, symulowanego wyżarzania, roju cząstek itp.) [20].

W niniejszej pracy do minimalizacji funkcji celu, zdefiniowanej wzorem:

$$\omega = \|U_{exp} - U_{num}(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (1)$$

wykorzystano algorytmy gradientowe oparte na metodzie Newtona z modyfikacją Levenberga-Marquardta (LM), gdzie: U_{exp} – przemieszczenie wyznaczone eksperymentalnie, U_{num} – przemieszczenie obliczone numerycznie, \mathbf{x} – wektor szukanych parametrów.

W algorytmie LM nowy kierunek (krok w procedurze iteracyjnej) obliczany jest na podstawie wzoru:

$$\Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{H}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}_x \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{H}_x – macierz Hessego (druga pochodna funkcji celu ω względem parametrów modelu \mathbf{x}), \mathbf{g}_x – gradient (pierwsza pochodna funkcji celu ω względem parametrów modelu \mathbf{x}), \mathbf{I} – macierz jednostkowa, λ – współczynnik LM.

Algorytm LM charakteryzuje się wysoką skutecznością i dużą szybkością, przy założeniu, że zagadnienie odwrotne jest poprawnie sformułowane i dane eksperymentalne nie są mocno zaszumione.

Sformułowanie problemu odwrotnego

Na podstawie obserwacji przedstawionych przez autorów w artykule [12, 13], wybrany został zestaw testów wytrzymałościowych, uznany jako niezbędny do pełnej identyfikacji sprężystego modelu ortotropowego tektury. Są to odpowiednio:

- sztywność na zginanie w kierunku MD BNT1 $\rightarrow f(D_{22}, R_4)$
- sztywność na zginanie w kierunku CD BNT2 $\rightarrow f(D_{11}, R_5)$
- sztywność na skręcanie w kierunku MD TST1 $\rightarrow f(D_{33}, R_4)$
- sztywność na skręcanie w kierunku CD TST2 $\rightarrow f(D_{33}, R_5)$
- sztywność na skręcanie w kierunku MD SST1 $\rightarrow f(D_{33}, R_4, R_5)$
- sztywność na skręcanie w kierunku CD SST2 $\rightarrow f(D_{33}, R_4, R_5)$
- odporność na zgniatanie kolumnowe ECT $\rightarrow f(A_{22})$

W testach tych, w różnym stopniu aktywne są następujące sztywności:

- D_{11} – sztywność na zginanie w kierunku MD,
- D_{22} – sztywność na zginanie w kierunku CD,
- D_{33} – sztywność na skręcanie,
- A_{11} – sztywność na ściskanie w kierunku MD,
- A_{22} – sztywność na ściskanie w kierunku CD,

tinuous, etc., the identification process is more difficult, which is associated with the need of using more advanced algorithms. Continuous and convex functions are usually applied to gradient algorithms, to discontinuous or non-convex functions – evolutionary algorithms (e.g. genetic algorithms, simulated annealing, particle swarm, etc.) [20].

In this work, to minimize the objective function, defined by the formula:

$$\omega = \|U_{exp} - U_{num}(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (1)$$

gradient algorithms, based on the Newton method with the Levenberg-Marquardt modification (LM) were used, where: U_{exp} – experimentally determined displacement, U_{num} – numerically calculated displacement, \mathbf{x} – vector of sought parameters.

In the LM algorithm, the new direction (step in the iterative procedure) is calculated based on the formula:

$$\Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{H}_x + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}_x \quad (2)$$

where: \mathbf{H}_x – the Hessian matrix (the second derivative of the objective function ω with respect to the \mathbf{x} model parameters), \mathbf{g}_x – the gradient (the first derivative of the objective function ω with respect to the \mathbf{x} model parameters), \mathbf{I} – the identity matrix, λ – the LM factor.

The LM algorithm is characterized by high efficiency and high speed, assuming that the inverse problem is correctly formulated and the experimental data is not very noisy.

The formulation of the inverse problem

Based on the observations presented by the authors in the article [12, 13], a set of strength tests was chosen, which was deemed necessary for the full identification of the elastic orthotropic model of cardboard; these are respectively:

- bending stiffness test in MD (machine direction) BNT1 $\rightarrow f(D_{22}, R_4)$
- bending stiffness test in CD (cross direction) BNT2 $\rightarrow f(D_{11}, R_5)$
- torsional stiffness test in MD TST1 $\rightarrow f(D_{33}, R_4)$
- torsional stiffness test in CD TST2 $\rightarrow f(D_{33}, R_5)$
- shear stiffness test in MD SST1 $\rightarrow f(D_{33}, R_4, R_5)$
- shear stiffness test in CD SST2 $\rightarrow f(D_{33}, R_4, R_5)$
- edge crush test ECT $\rightarrow f(A_{22})$

In these tests, the following stiffnesses are active to varying degrees:

- D_{11} – bending stiffness in MD,
- D_{22} – bending stiffness in CD,
- D_{33} – torsional stiffness,
- A_{11} – compression stiffness in MD,
- A_{22} – compression stiffness in CD,



R_4 – sztywność na ścinanie transversalne w płaszczyźnie 1-3,
 R_5 – sztywność na ścinanie transversalne w płaszczyźnie 2-3,
 z których można wyznaczyć parametry materiałowe ortotropowego modelu tektury falistej [12, 13]:

t – zastępcza grubość tektury,

E_1 – moduł sztywności w kierunku MD,

E_2 – moduł sztywności w kierunku CD,

$\nu_{12} = 0.293\sqrt{E_1/E_2}$ – współczynnik Poissona w płaszczyźnie 1-2 [2],

G_{12} – moduł sztywności na ścinanie w płaszczyźnie 1-2,

G_{13} – moduł sztywności na ścinanie transversalne w płaszczyźnie 1-3,

G_{23} – moduł sztywności na ścinanie transversalne w płaszczyźnie 2-3.

Przy tak zaprojektowanym zestawie testów laboratoryjnych funkcja celu opisana równaniem (1) przyjmuje teraz postać:

$$\omega = \|\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{U}_{exp} = [U_{BNT1}, U_{BNT2}, \dots]$, $\mathbf{U}_{num} = [U_{BNT1}, U_{BNT2}, \dots]$.

Przemieszczenia eksperymentalne \mathbf{U}_{exp} i obliczeniowe \mathbf{U}_{num} w równaniu (3) wyznaczone są przy założeniu, że na próbkę działają siły, których wartości zależą od rodzaju testu i typu próbki. Miejsce przyłożenia sił oraz punkty, w których odczytywano przemieszczenia w poszczególnych testach, zestawiono na rysunku 1.

Aby wyznaczyć funkcję celu opisaną równaniem (3), w każdej iteracji, wymagany jest wektor przemieszczeń, zbudowany z wszystkich siedmiu eksperymentów oraz wektor przemieszczeń uzyskany z siedmiu symulacji komputerowych. W takiej konfiguracji testów możliwe jest uproszczenie zagadnienia odwrotnego, przez zastosowanie metody najmniejszych kwadratów. Poprzez postawienie w ten sposób problemu odwrotnego można znacznie uprościć sposób obliczania gradientu oraz macierzy Hessego w równaniu (2).

$$\mathbf{g}_x = \mathbf{J}^T (\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x})) \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (5)$$

gdzie: \mathbf{J} – macierz Jakobiego, wyrażona wzorem:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial (\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \quad (6)$$

R_4 – transverse shear stiffness in 1-3 plane,

R_5 – transverse shear stiffness in 2-3 plane

from which one can determine the material parameters of the orthotropic model of corrugated board [12, 13]:

t – the effective thickness,

E_1 – stiffness modulus in MD,

E_2 – stiffness modulus in CD,

$\nu_{12} = 0.293\sqrt{E_1/E_2}$ – Poisson coefficient in the 1-2 plane [2],

G_{12} – shear stiffness modulus in 1-2 plane,

G_{13} – transverse shear stiffness modulus in 1-3 plane,

G_{23} – transverse shear stiffness modulus in 2-3 plane.

With the laboratory test set designed in this way, the objective function described by the equation (1) now takes the form:

$$\omega = \|\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (3)$$

where: $\mathbf{U}_{exp} = [U_{BNT1}, U_{BNT2}, \dots]$, $\mathbf{U}_{num} = [U_{BNT1}, U_{BNT2}, \dots]$.

Experimental \mathbf{U}_{exp} and computational \mathbf{U}_{num} displacements in equation (3) are determined assuming that forces act on the sample, the values of which depend on the type of the test and the type of the sample. The place where forces were applied and the points at which displacements were read in particular tests are presented in Fig. 1.

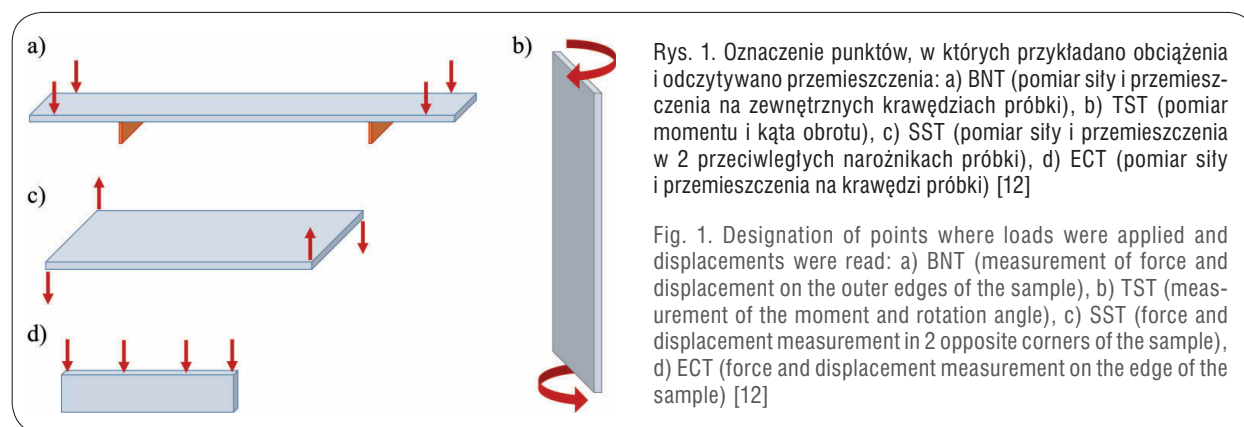
To determine the objective function described by equation (3), in each iteration, a displacement vector is required, built from all seven experiments and a displacement vector obtained from seven computer simulations. In this test configuration it is possible to simplify the inverse problem by using the least squares method. By putting in this way the inverse problem, one can greatly simplify the method of calculating the gradient and the Hessian matrix in equation (2).

$$\mathbf{g}_x = \mathbf{J}^T (\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x})) \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (5)$$

where: \mathbf{J} – the Jacobian matrix, expressed by the formula:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial (\mathbf{U}_{exp} - \mathbf{U}_{num}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \quad (6)$$



Rys. 1. Oznaczenie punktów, w których przykładano obciążenia i odczytywano przemieszczenia: a) BNT (pomiar siły i przemieszczenia na zewnętrznych krawędziach próbki), b) TST (pomiar momentu i kąta obrotu), c) SST (pomiar siły i przemieszczenia w 2 przeciwległych narożnikach próbki), d) ECT (pomiar siły i przemieszczenia na krawędzi próbki) [12]

Fig. 1. Designation of points where loads were applied and displacements were read: a) BNT (measurement of force and displacement on the outer edges of the sample), b) TST (measurement of the moment and rotation angle), c) SST (force and displacement measurement in 2 opposite corners of the sample), d) ECT (force and displacement measurement on the edge of the sample) [12]



Wyniki identyfikacji zależą nie tylko od skuteczności wybranego algorytmu do minimalizacji funkcji celu, ale również od jakości danych (tj. zaszumienia wyników), ilości i typów testów laboratoryjnych, a także od wymiarów próbek. Sprawdzenie wszystkich wariantów jest bardzo pracochłonne, dlatego w niniejszej pracy wykorzystano metodę opartą na pseudo-eksperymentach, która pozwala na szybką weryfikację różnych konfiguracji testowych oraz daje możliwość sprawdzenia wpływu wielu parametrów (zależnych i niezależnych) na wyniki identyfikacji. Wykorzystanie pseudo-eksperymentu w procesie identyfikacji pozwala również na łatwe zweryfikowanie otrzymanych wyników, ponieważ szukane parametry są de facto znane a priori. Nie są one przekazywane do procedury odwrotnej, a jedynie wykorzystywane a posteriori do sprawdzenia skuteczności algorytmu.

Wyniki i obserwacje

W niniejszej pracy zarówno modele pseudo-eksperymentalne, jak i modele numeryczne zostały zbudowane w programie FEMat Cardboard. Program ten wykorzystuje metodę elementów skończonych i służy do symulacji różnych konstrukcji z tektury falistej. Arkusz tektury modelowany jest jako zhomogenizowany 2-wymiarowy panel (tzw. elementy powłokowe, ang. *shell elements*) w przestrzeni 3D [1, 3, 7, 8, 32].

Wszystkie dane pseudo-eksperymentalne były zaszumione białym szumem Gaussa o natężeniu 1-5%. Modele komputerowe służące do wygenerowania danych pseudo-eksperymentalnych oraz modele numeryczne wykorzystane w procedurze odwrotnej różniły się jakością siatki elementów skończonych oraz ilością elementów. We wszystkich modelach wykorzystano najprostsz model sprężysty ortotropowy tektury falistej.

Początkowe wartości parametrów materiałowych w procedurze odwrotnej wybierane były losowo w zakresie 25-400% rzeczywistych wartości. Każda analiza odwrotna była powtarzana 200-500 razy w celu wyznaczenia średnich wartości błędu identyfikacji dla każdego z 6 wybranych indeksów tektury (3F, 3E, 3B, 3C, 5EB, 5BC) i dla każdego poziomu zaszumienia (1, 2 lub 5%) danych pseudo-eksperymentalnych.

Przeprowadzono serię analiz porównawczych dla blisko 100 różnych konfiguracji testowych (kombinacji testów i wymiarów próbek). W niniejszej pracy zestawiono wyniki dla 3 wybranych konfiguracji testowych, pokazanych w tabeli 1.

Konfiguracja A jest standardowym przykładem z wykorzystaniem wszystkich testów laboratoryjnych, z normowym lub typowym wymiarem próbek. Konfiguracja B to przykład, w którym próbka SST jest kwadratowa, przez co nie jest wymagany test w kierunku CD. W konfiguracji C próbka w teście BNT jest dodatkowo skrócona w celu zwiększenia wpływu ścinania poprzecznego na mierzone przemieszczenia. Wyniki przeprowadzonych analiz zestawiono w tabelach 2-4.

The identification results depend not only on the effectiveness of the chosen algorithm for the minimization of the objective function but also on the quality of the data (i.e. noise of the results), the number and types of laboratory tests as well as the sample dimensions. Checking all variants is very costly, therefore in this work a method based on a pseudo-experiment was used, which allows for quick verification of various test configurations and gives the opportunity to check the impact of many parameters (dependent and independent) on the identification results. The use of a pseudo-experiment in the identification process also allows for easy verification of the obtained results, because the sought parameters are de facto known a priori. They are not transferred to the inverse procedure, but only used a posteriori to check the effectiveness of the algorithm.

Results and observations

In this work, both pseudo-experimental models and numerical models were built in the FEMat Cardboard software. This program uses the finite element method and is used to simulate various corrugated board constructions. The board sheet is modeled as a homogenized 2-dimensional panel (so-called shell elements) in 3D space [1, 3, 7, 8, 32].

All pseudo-experimental data was noised with a Gaussian white noise at an intensity of 1 to 5%. Computer models used to generate pseudo-experimental data and numerical models used in the inverse procedure differed in the quality of the finite element mesh and the number of elements. In all models, the simplest elastic orthotropic model of corrugated cardboard was used.

The initial values of material parameters in the inverse procedure were chosen randomly in the range from 25% to 400% of real values. Each inverse analysis was repeated 200-500 times to determine the average values of the identification error for each of the 6 selected cardboard indexes (3F, 3E, 3B, 3C, 5EB, 5BC) and for each level of noise (1, 2 or 5%) of the pseudo-experimental data.

A series of comparative analyzes was carried out for nearly 100 different test configurations (a combination of tests and sample dimensions). In this paper the results for three selected test configurations, shown in Table 1, were presented.

Configuration A is a standard example using all laboratory tests, with standard or typical sample sizes. Configuration B is an example in which the SST sample is a square, which does not require a test in the CD. In configuration C, the BNT sample is additionally shortened in order to increase the impact of transverse shear on the measured displacements. The results of the analyzes carried out are summarized in Tables 2-4.



Tabela 1. Wybrane konfiguracje testów laboratoryjnych z wymiarami próbek w poszczególnych testach

Table 1. Selected laboratory test configurations with sample dimensions in individual tests

	ECT	BNT1	BNT2	TST1	TST2	SST1	SST2
A	100×25	L=100	L=100	150×25	150×25	60×120	60×120
B	100×25	L=100	L=100	150×25	150×25	60×60	---
C	100×25	L=50	L=50	150×25	150×25	60×60	---

Tabela 2. Procentowy błąd identyfikacji parametrów sztywności dla różnych indeksów tektury i dla różnych poziomów zaszumienia danych pseudo-eksperymentalnych. Konfiguracja testów – A

Table 2. Percentage error of the identification of stiffness parameters for various board indexes and for different noise levels of pseudo-experimental data. Test configuration – A

Grade	Noise [%]	D11 [%]	D22 [%]	A22 [%]	D33 [%]	R4 [%]	R5 [%]
3F	1	0,1	0	0,1	0,1	6,8	55,2
	2	0,2	0,1	0,1	0,1	33,4	87,7
	5	0,2	0,5	0,5	0,4	97,0	103,5
3E	1	0,1	0,1	0,1	0,1	3,8	21,6
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	7,2	42,4
	5	0,3	0,5	0,4	0,6	52,6	87,1
3B	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5	1,3
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4	1,3
	5	0,6	0,3	0,2	0,6	3,0	21,1
3C	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,8
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2
	5	0,5	0,6	0,5	0,3	1,5	0,1
5EB	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,8
	5	0,5	0,3	0,3	0,5	0,7	3,2
5BC	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
	5	0,2	0,4	0,5	0,2	0,3	0,7

Tabela 3. Procentowy błąd identyfikacji parametrów sztywności dla różnych indeksów tektury i dla różnych poziomów zaszumienia danych pseudo-eksperymentalnych. Konfiguracja testów – B

Table 3. Percentage error of the identification of stiffness parameters for various board indexes and for different noise levels of pseudo-experimental data. Test configuration – B

Grade	Noise [%]	D11 [%]	D22 [%]	A22 [%]	D33 [%]	R4 [%]	R5 [%]
3F	1	0,1	0,1	0,1	0,1	26,4	91,8
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	78,9	123,7
	5	0,5	0,5	0,5	0,7	126,7	154,3

Grade	Noise [%]	D11 [%]	D22 [%]	A22 [%]	D33 [%]	R4 [%]	R5 [%]
3E	1	0,1	0,1	0,1	0,1	5,0	32,0
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	20,0	71,1
	5	0,5	0,4	0,6	0,9	96,5	133,8
3B	1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	2,3
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	2,9
	5	0,6	0,4	0,6	1,0	13,3	54,2
3C	1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2	1,3
	2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	2,0
	5	0,4	0,4	0,5	0,3	1,0	7,8
5EB	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6
	2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	1,6
	5	0,5	0,3	0,4	0,1	0,0	6,6
5BC	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
	2	-0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	1,8
	5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,1	1,1

Tabela 4. Procentowy błąd identyfikacji parametrów sztywności dla różnych indeksów tektury i dla różnych poziomów zaszumienia danych pseudo-eksperymentalnych. Konfiguracja testów – C

Table 4. Percentage error of the identification of stiffness parameters for various board indexes and for different noise levels of pseudo-experimental data. Test configuration – C

Grade	Noise [%]	D11 [%]	D22 [%]	A22 [%]	D33 [%]	R4 [%]	R5 [%]
3F	1	0,1	0,1	0,1	0,1	29,7	74,2
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	78,3	103,7
	5	0,7	0,4	0,4	0,5	125,9	140,7
3E	1	0,1	0,1	0,1	0,1	4,1	22,9
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	25,9	84,0
	5	0,6	0,6	0,4	0,6	69,9	105,6
3B	1	0,2	0,2	0,2	0,4	0,1	3,6
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	2,3
	5	0,1	0,1	0,3	0,1	4,9	28,6
3C	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
	2	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	3,5
	5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,9	11,8
5EB	1	0,4	0,4	0,3	0,1	0,1	1,5
	2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,4	1,4
	5	0,4	0,4	0,3	0,5	0,9	11,0
5BC	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
	5	0,4	0,4	0,5	0,3	0,5	0,3



Na podstawie przedstawionych wyników w tabelach 2-4, można wyciągnąć generalny wniosek, że bez względu na konfigurację testu, identyfikacja parametrów R_4 i R_5 jest najbardziej problematyczna, szczególnie w przypadku indeksów 3E i 3F (komórki zaznaczone w tabeli na czerwono). W pozostałych przypadkach błąd identyfikacji zazwyczaj nie przekracza 2-3%, jedynie w przypadku parametru R_5 (indeksy 3B, 3C, 5EB, 5BC) dla zaszumienia danych na poziomie 5% błąd ten wzrasta do ok 10%. Wrażliwość wyników testów na parametry R_4 i R_5 (tj. "stopień aktywności" tych parametrów) jest bardzo niska dla tektur 3E i 3F, dlatego ich identyfikacja jest trudna lub wręcz niemożliwa. Jednakże nawet błędne oszacowanie tych parametrów dla tektur z niskim przekrojem (3E i 3F) nie zaburza wyników analiz numerycznych ponieważ wpływ tych parametrów na obliczenia jest bardzo niewielki. Na podstawie porównania wyników w tabelach 2-4, można stwierdzić, że wykorzystanie pełnego zestawu testów pozwala na najbardziej precyzyjną identyfikację.

Wnioski końcowe

W artykule przedstawiono wyniki przeprowadzonych badań mających na celu sprawdzenie skuteczności różnych procedur identyfikacji parametrów materiałowych tektury falistej. Sprawdzono również wpływ różnych konfiguracji testów laboratoryjnych oraz różnych wymiarów próbek na jakość analiz odwrotnych. Z przeprowadzonych analiz wynika, że wybrana konfiguracja testów laboratoryjnych (nawet dla mocno zaszumionych danych eksperymentalnych), w połączeniu z odpowiednim modelem numerycznym oraz lokalnym, gradientowym algorytmem obliczeniowym pozwala na bardzo precyzyjną identyfikację wybranych parametrów konstytutywnych tektury. Na podstawie uzyskanych wyników można jednoznacznie stwierdzić, że analiza odwrotna może być bezpośrednio wykorzystywana do identyfikacji parametrów różnych modeli konstytutywnych tektury falistej. Wykazano również, że odpowiednia konfiguracja zarówno standardowych, jak i nowych testów laboratoryjnych, w połączeniu z modelami numerycznymi może być skutecznie wykorzystywana do identyfikacji parametrów materiałów ortotropowych.

Artykuł recenzowany

On the basis of the presented results in tables 2-4, one can draw a general conclusion that regardless of the configuration of the test, the identification of parameters R_4 and R_5 is the most problematic, especially for 3E and 3F grades (cells marked in the table in red). In other cases, the identification error usually does not exceed 2-3 percent, only in the case of parameter R_5 (grades 3B, 3C, 5EB, 5BC) for noise level at 5%, this error increases to about 10%. The sensitivity of the test results to the parameters R_4 and R_5 (ie the "degree of activity" of these parameters) is very low for 3E and 3F boards, therefore their identification is difficult or even impossible. However, even an incorrect estimation of these parameters for corrugated boards with a low cross-section (3E and 3F) does not affect the results of numerical analyzes because the influence of these parameters on the calculation is very small. Based on a comparison of the results in tables 2-4, it appears that the use of a full set of tests allows the most precise identification.

Conclusions

The article presents the results of tests carried out to check the effectiveness of various procedures for the identification of corrugated board material parameters. The influence of various laboratory test configurations and different sample sizes on the quality of inverse analyzes was also checked. The conducted analysis shows that the selected configuration of laboratory tests (even for strongly noisy experimental data), in combination with the appropriate numerical model and local, gradient computational algorithm allows for very precise identification of selected constitutive cardboard parameters. On the basis of the obtained results, it can be clearly stated that the inverse analysis can be directly used to identify the parameters of various constitutive corrugated board models. It was also shown that the appropriate configuration of both standard and new laboratory tests, in combination with numerical models can be effectively used for the mechanical characterization of orthotropic materials.

Peer-reviewed article

LITERATURA / LITERATURE

- [1] Allaoui S., Benzeggagh M.L., Aboura Z., Talbi N. 2004. "Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modeling". *Composite Struc.* 63: 53-62.
- [2] Baum G.A., Habeger C., Fleischman H. 1981. "Measurement of the orthotropic elastic constants of paper". *IPC technical paper series number 117.*
- [3] Biancolini M.E., Brutti C. 2003. „Numerical and experimental investigation of the strength of corrugated board packages”. *Packag. Technol. Sci.* 16, 47-60.
- [4] Burzyński W. 1928. "Studium nad hipotezami wyciężenia", Nakładem Akademii Nauk Technicznych, Lwów.
- [5] Castro J., Ostoja-Starzewski M.O. 2003. „Elastoplasticity of paper”. *Int. J. Plasticity* 19 : 2083-2098.
- [6] Chuda-Kowalska M., Gajewski, T., Garbowski, T. 2015. „Mechanical characterization of orthotropic elastic parameters of a foam by the mixed experimental-numerical analysis”. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 53 (2) : 383-394.



- [7] Crisfield M. A. 1996. "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Wiley.
- [8] de Souza Neto E.A., Peric D., Owen D.R.J. 2008. "Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications", Wiley.
- [9] Gajewski T., Garbowski T. 2014. "Calibration of concrete parameters based on digital image correlation and inverse analysis". *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 14 (1) : 170-180.
- [10] Gajewski T., Garbowski T. 2014. "Mixed experimental/numerical methods applied for concrete parameters estimation". Recent Advances in Computational Mechanics – Proceedings of the 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics, CMM 2013, Eds. T. Łodygowski, J. Rakowski, P. Litewka, CRC Press. 293-302.
- [11] Garbowski T., Borysiewicz A. 2014. „The stability of corrugated board packages”, *Przegląd Papierniczy* 70 (8) : 452-458.
- [12] Garbowski T., Czelusta I., Graczyk Ł. 2018. „Computer aided estimation of corrugated board box compression strength. Part 1. The influence of flute crash on basic properties of corrugated board”. *Przegląd Papierniczy* 74 (6) : 381-388.
- [13] Garbowski T., Garbowska L. 2018. "Computer aided estimation of corrugated board box compression strength. Part 2. The sensitivity analysis in selected laboratory tests of corrugated board". *Przegląd Papierniczy* 74 (8) : 435-440.
- [14] Garbowski T., Imbierowicz R. 2014. "Sensitivity analysis of edge crush test". *Przegląd Papierniczy* 70 (9) : 559-564.
- [15] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Numerical strength estimate of corrugated board packages. Part 1. Theoretical assumptions in numerical modeling of paperboard Packages". *Przegląd Papierniczy* 70 (4) : 219-222.
- [16] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Numerical strength estimate of corrugated board packages. Part 2. Experimental Tests and numerical analysis of paperboard packages". *Przegląd Papierniczy* 70 (5) : 277-281.
- [17] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Homogenization of corrugated paperboard. Part 1. Analytical homogenization". *Przegląd Papierniczy* 70 (6) : 345-349.
- [18] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Homogenization of corrugated paperboard. Part 2. Numerical homogenization". *Przegląd Papierniczy* 70 (7) : 390-394.
- [19] Garbowski T., Maier G., Novati G. 2011. "Diagnosis of concrete dams by flat-jack tests and inverse analyses based on proper orthogonal decomposition". *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 6 (1-4) : 181-202.
- [20] Garbowski T., Maier G., Novati G. 2012. "On calibration of orthotropic elastic-plastic constitutive models for paper foils by biaxial tests and inverse analyses". *Struc. Multidisciplinary Optimization* 46 : 111-128.
- [21] Garbowski T., Pożarycki A. 2017. "Multi-level backcalculation algorithm for robust determination of pavement layers parameters". *Inverse Problems in Science and Engineering* 25 (5) : 674-693.
- [22] Garbowski T., Przybyszewski G. 2015. "The Sensitivity analysis of critical force in box compression test". *Przegląd Papierniczy* 71 (5) : 275-280.
- [23] Garbowski T., Venier A. 2016. "Reliable mechanical characterization of layered pavement structures". Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues – 3rd Polish Congress of Mechanics, PCM 2015 and 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics, CMM 2015, 183-186.
- [24] Harrysson A., Ristinmaa M. 2008. "Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board". *Int. J. Solids Structures* 45: 3334-3352.
- [25] Hill R. 1948. "A theory of the yielding and plastic flow in anisotropic metals". *Proc. Royal Soc.* 193: 281-297.
- [26] Hoffman O. 1967. "The brittle strength of orthotropic materials". *J. Composite Mat.* 1, 200-206.
- [27] Maier G., Bolzon G., Buljak V., Garbowski T., Miller B. 2012. "Synergic combinations of computational methods and experiments for structural diagnoses". Advanced Structured Materials, Eds. M. Kuczma, K. Wilmanski, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 453-476.
- [28] Maier G., Buljak V., Garbowski T., Cocchetti G., Novati G.: "Mechanical characterization of materials and diagnosis of structures by inverse analyses: some innovative procedures and applications". *Int. J. Computational Methods* 11 (3) 1343002 (25 pages).
- [29] Makela P., Ostlund S. 2003. "Orthotropic elasticplastic material model for paper materials". *Int. J. Solids Structures* 40 : 5599-5620.
- [30] Tsai S.W., Wu E.M. 1971. "A general theory of strength for anisotropic materials". *J. Composite Mat.* 5 : 58-80.
- [31] Xia Q.S., Boyce M.C., Parks D.M. 2002 "A constitutive model for the anisotropic elasticplastic deformation of paper and paperboard". *Int. J. Solids Structures* 39 : 4053-4071.
- [32] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. 2005 "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", Butterworth-Heinemann.
- [33] Zirpoli A., Maier G., Novati G., Garbowski T. 2008. „Dilatometric tests combined with computer simulations and parameter identification for in-depth diagnostic analysis of concrete dams”, Life-Cycle Civil Engineering – Proceedings of the 1st International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering, IALCCE '08, Eds. F. Biondini, D.M. Frangopol, CRC Press, 259-264.