

Analityczna weryfikacja popularnej formuły McKee

Analytical verification of popular McKee's formula

TOMASZ GARBOWSKI, MAŁGORZATA KUCA, MONIKA NIZIAŁEK-ŁUKAWSKA

DOI: 10.15199/54.2019.12.1

W pracy przedstawiono krytyczne spojrzenie na popularną metodę estymacji wytrzymałości statycznej prostych opakowań z tektury falistej. Metoda, choć ma już ponad pięćdziesiąt lat, przetrwała próbę czasu i wciąż cieszy się ogromną popularnością wśród konstruktorów opakowań i pracowników działu kontroli jakości. Zaproponowane przez McKee i in. wzory stały się najprostszym i zarazem najdokładniejszym predyktorem nośności regularnych pudeł klapowych. Sukces metody polega na wykorzystaniu łatwych do pozyskania w laboratorium parametrów tektury oraz empirycznych współczynników, które pozwalają na dokładne dopasowanie wyników do danych eksperymentalnych. W pracy uważnie przestudiowano formułę McKee, przeanalizowano jej założenia i zastosowane uproszczenia, sprawdzono granice stosowalności różnych jej wersji oraz określono jej dokładność w predykcji wytrzymałości na ściskanie różnych konstrukcji opakowań z tektury falistej.

Słowa kluczowe: formuła McKee, nośność pudła, tektura falista

The paper presents a critical look at the popular method of estimating the static strength of simple corrugated packaging. Although the method is over fifty years old, it has withstood the test of time and is still very popular among packaging designers and the quality control department employees. Proposed by McKee et al. equations have become the simplest, and also the most accurate predictor of the load capacity of regular flap boxes. The success of the method is based on the use of cardboard parameters easy to obtain in the laboratory and empirical coefficients that allow accurate matching of results to experimental data. In the present work the McKee formula is carefully studied, its assumptions and applied simplifications are analyzed, the limits of applicability of its different versions are checked and finally its accuracy in the prediction of compressive strength of various packaging designs made of corrugated board is determined.

Keywords: McKee's formula, box strength, corrugated materials

Wprowadzenie

Tektura falista od wielu lat zyskuje na popularności i staje się jednym z wiodących materiałów w przemyśle opakowań. Jednak nie zawsze tak było. Jeszcze kilkanaście lat temu kartonowe opakowania kojarzyły się głównie z przewodzkami. Sprzedaż internetowa dopiero raczkowała w porównaniu z tym, co obserwujemy dzisiaj. Ponadto, większość firm i konsumentów nie zwracała uwagi na swoją rolę w procesie ochrony środowiska, a istniejące regulacje nie nakazywały kontroli działalności branży opakowaniowej, co przyczyniło się do ekspansji innego rozwiązania i materiału – plastiku. Na szczęście nowoczesne przedsiębiorstwa szybko zrozumiły, że plastik nie tylko rujnował środowisko, ale również ich marki. Konsumenty na całym świecie zwiększyli swoje wymagania wobec ochrony środowiska, przez co wiele firm musiało wprowadzić zmiany. Jedną z najlepszych alternatyw została nadająca się do recyklingu tektura falista, głównie z uwagi na swój biodegradowalny charakter.

Dzisiejsze opakowania z tektury falistej nie są już nudnymi, szarobrazowymi pudłami transportowymi, są produkowane z wielokolorowymi nadrukami i w różnych kształtach, co czyni je bardzo atrakcyjnymi zarówno dla firm zajmujących się e-commerce, jak i ich odbiorców. Często zdarza się, że opakowanie musi spełniać jednocześnie kryteria estetyczne, jak i wytrzymałościowe. Najlepszym przykładem są tzw. „shelf ready boxes” – SRP lub „retail ready boxes” – RRP, czyli brandowane pudełka zbiorcze do sprzedaży detalicznej. Żeby optymalnie dobrać jakość tektury falistej do tego typu opakowań niezbędne są modele numeryczne [4, 5] oparte na metodach homogenizacji [6, 7]. Jednakże, do prostych konstrukcji klapowych w zupełności wystarczą modele oparte na równaniach analitycznych lub wzorach empirycznych [8].

Dr inż. **T. Garbowski**, Politechnika Poznańska, Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; mgr inż. **M. Kuca**, (malgorzata.kuca@schumacher-packaging.com); mgr inż. **M. Niziałek-Łukawska** (monika.nizialek-lukawska@schumacher-packaging.com), Schumacher Packaging Sp. z o.o., ul. Wrocławska 66, 55-330 Krępsce



Jedną z najbardziej popularnych metod estymacji wytrzymałości opakowań w kształcie prostokądnianu jest metoda zaproponowana w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku przez McKee i jego współpracowników [8]. Metoda ta wykorzystuje podstawowe parametry tektury falistej i empirycznie dobrane współczynniki korekcyjne, które pozwalają na poprawę dokładności uzyskiwanych wyników. Niestety, wprowadzone współczynniki obniżają uniwersalność metody głównie dlatego, że muszą być dobrane indywidualnie dla praktycznie każdej jakości tektury i każdej konstrukcji opakowania. Żeby lepiej zrozumieć wszystkie ograniczenia metody, popularnie zwanej formułą McKee, niezbędne jest uważne przestudiowanie ścieżki rozumowania jej autorów.

Formuła McKee do estymacji indeksu BCT

McKee i in. rozpoczęli opracowywanie formuły od wyznaczenia indeksu BCT dla prostokątnej płyty o wymiarze obciążonej pionowo na górnej krawędzi. Analizowana płyta stanowi wyciętą część składową prostokądnianego opakowania (rys. 1). Wszystkie cztery krawędzie płyty są przegubowo podparte w kierunku Y , dolna krawędź dodatkowo podparta jest na szerokości b w kierunku Z . Podstawą wyprowadzenia jest empiryczny wzór na obciążenie niszczące P [N/mm] (1), które wg założenia autorów jest wynikiem kombinacji wytrzymałości na ściskanie i wytrzymałości na wyboczenie w następujący sposób:

$$P = C_1 \cdot P_s^r \cdot P_{cr}^{(1-r)} \quad (1)$$

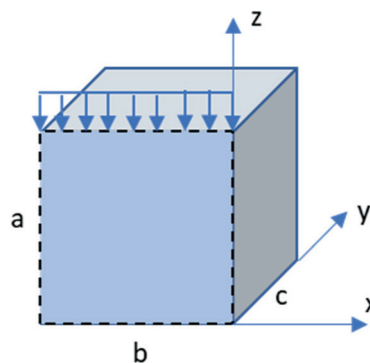
gdzie: C_1 – pewna stała, r – wykładnik w przedziale (0,1) (najczęściej przyjmuje się $r = 0,75$), P_s – wytrzymałość na zgniatanie krawędziowe tektury falistej, przyjmuje się jako wartość indeksu ECT w N/mm, P_{cr} – obciążenie krytyczne w N/mm, które zostało uproszczone do następującej postaci:

$$P_{cr} = \frac{C_2 \bar{D}}{b^2} \quad (2)$$

gdzie: C_2 – pewna stała, $\bar{D} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$ – efektywna sztywność na zginanie [Nmm], b – szerokość płyty [mm].

Definicję obciążenia krytycznego P_{cr} oparto na dwóch założeniach:

- Współczynnik C_2 zależy, między innymi, od stosunku a do b i musi być dobrany indywidualnie dla każdej proporcji wymiarów a/b .
- Efektywna sztywność zginania \bar{D} zależy jedynie od D_{11} – sztywności zginania w kierunku maszynowym (MD) oraz D_{22} – sztywności zginania w kierunku poprzecznym (CD).



Rys. 1. Pojedynczy panel opakowania

Wykorzystanie efektywnej sztywności \bar{D} w równaniu (2) w praktyce upraszcza problem do zagadnienia izotropowego, przez co współczynnik C_2 można jawnie zapisać:

$$C_2 = \pi^2 \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (3)$$

Parametr m w równaniu (3) dobieramy tak, aby współczynnik C_2 przyjmował wartość minimalną.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, równanie (2) można zapisać następująco:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (4)$$

Jednakże, tektura falista, podobnie jak inne materiały włókniste, charakteryzuje się ortotropią – jej właściwości mechaniczne zmieniają się w zależności od kierunku, dlatego w przypadku płyt ortotropowych o dowolnych wymiarach a i b definicja obciążenia krytycznego powinna mieć następującą postać:

$$P_{cr} = \frac{1}{\alpha^2} (D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \quad (5)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{\pi}{b} \quad (6a)$$

$$D_{11} = \frac{1}{\nu} E_{11} I, D_{22} = \frac{1}{\nu} E_{22} I \quad (6b)$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{21}}{\nu} E_{11} I = \frac{\nu_{12}}{\nu} E_{22} I, D_{66} = G_{12} I \quad (6c)$$

$$I = \frac{h^3}{12}, \nu = (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \quad (6d)$$

We wzorach (6b-6d) wykorzystano następujące wielkości: h – grubość tektury, E_{11} – efektywny moduł sprężystości w kierunku MD, E_{22} – efektywny moduł sprężystości w kierunku

CD, G_{12} – efektywny moduł sprężystości poprzecznej, ν_{12} i ν_{21} – efektywne współczynniki Poissona w płaszczyźnie xz. Efektywne, w kontekście modułów sprężystości, oznacza zhomogenizowany lub zastępczy, więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w pracach [6, 7].

Jeżeli chcemy uwzględnić również sztywność na ścinanie transwersalne G_{13} i G_{23} to wzór na obciążenie krytyczne zapisujemy:

$$P_{cr} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M}{N} \quad (7)$$

gdzie:

$$M = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + \left(\frac{\alpha^2}{r_1} + \frac{\beta^2}{r_2}\right)c_1 \quad (8a)$$

$$N = 1 + \frac{c_1}{r_1 r_2} + \frac{c_2}{r_2} + \frac{c_3}{r_1} \quad (8b)$$

$$r_1 = \frac{5}{6}G_{13}h, r_2 = \frac{5}{6}G_{23}h \quad (8c)$$

$$c_1 = c_2 c_3 - c_4^2 > 0 \quad (8d)$$

$$c_2 = D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 \quad (8e)$$

$$c_3 = D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 \quad (8f)$$

$$c_4 = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta \quad (8g)$$

Celem autorów formuły McKee było maksymalne uproszczenie skomplikowanych równań opisujących obciążenie krytyczne ściskanych płyt ortotropowych, tak aby ich stosowanie było powszechne i praktyczne. Zastosowanie efektywnej sztywności \bar{D} z całą pewnością znacznie upraszcza zagadnienie, niestety pominięcie efektów związanych z ortotropią wprowadza pewne niedokładności w estymacji wytrzymałości na wyboczenie. Analiza błędów, wprowadzona przez uproszczenia będzie przeprowadzona w dalszej części artykułu. Kolejnym krokiem podjętym przez autorów formuły McKee, było uproszczenie równania (3) opisującego stałą C_2 . Założyli oni, że płyta nie tylko jest izotropowa ale ma też równe boki: $a = b$, przez co $m = 1$, co prowadzi do uproszczenia równania (4) do postaci:

$$P_{cr} = \frac{(2\pi)^2}{b^2} \bar{D} \quad (9)$$

Powyższe równanie powinno zawierać dodatkowy współczynnik korygujący, który został tutaj przyjęty jako równy 1. Na

podstawie porównania równania (2) z (9) można bezpośrednio wyznaczyć wartość stałej $C_2 = (2\pi)^2$.

Podstawiając teraz do równania (1) wartość wytrzymałości na ściskanie $P_s = ECT$ oraz wartość wytrzymałości na wyboczenie wyprowadzoną w równaniu (9), i dodatkowo wprowadzając nową zmienną $k = 1 - r$, otrzymujemy:

$$P = C_1 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2k} \quad (10a)$$

co po zgrupowaniu zmiennych prowadzi do równania:

$$P = C_3 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot b^{(-2k)} \quad (10b)$$

gdzie:

$$C_3 = C_1(2\pi)^{2k} \quad (11)$$

W celu obliczenia indeksu BCT [N] pojedynczego panelu opakowania (rys.1) musimy przemnożyć wartość siły P opisanej wzorem (10b) przez szerokość panelu b , otrzymujemy zatem:

$$BCT = C_3 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot b^{(-2k)} \cdot b = C_3' \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot \sqrt{b} \quad (12)$$

gdzie:

$$C_3' = C_1(2\pi)^{2k} b^{(-2k+1/2)} \quad (13)$$

Natomiast w celu wyznaczenia indeksu BCT dla całego pudła przemnażamy wartość siły P przez obwód podstawy opakowania Z . Ponieważ autorzy formuły McKee przyjęli, że wszystkie boki pudła są równe, otrzymujemy obwód podstawy $Z = 4b$, przez co równanie (12) transformuje do:

$$BCT = C_3 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot b^{(-2k)} \cdot Z = C_4 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot \sqrt{Z} \quad (14)$$

gdzie:

$$C_4 = C_1(2\pi)^{2k} Z^{(-2k+1/2)} 4^{2k} \quad (15)$$

W przypadku pudeł z podstawą w kształcie prostokąta, $c \neq b$, równanie (14) można zapisać:

$$BCT = C_4 \cdot ECT^r \cdot \bar{D}^k \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad (16)$$

Ostatecznie wzór opisujący wytrzymałość opakowania na ściskanie przyjmuje postać zapisaną równaniem (14) lub (16). We wzorach tych występuje efektywna sztywność zginania \bar{D} , którą definiują opisane już sztywności zginania: D_{11} oraz D_{22} . Wyznaczenie tych wielkości w laboratoriach niewyposażonych w specjalne urządzenia pomiarowe przysparza pewnych trudności [2, 3] dlatego autorzy formuły McKee postanowili pozbyć się ich z równań.



Jeżeli przyjmiemy, że podobnie jak w przypadku efektywnej sztywności zginania, również w przypadku efektywnej sprężystości możemy posłużyć się uproszczeniem w postaci: $\bar{E} = \sqrt{E_{11}E_{22}}$ to równanie (14) zapisujemy:

$$BCT = C_4 \cdot ECT^r \cdot \left[\frac{\bar{E}h^3}{12} \right]^k \cdot \sqrt{Z} \quad (17)$$

co możemy dalej uprościć do najbardziej znanej postaci – krótkiej formuły McKee:

$$BCT = C_5 \cdot ECT \cdot \sqrt{hZ} \quad (18)$$

gdzie:

$$C_5 = C_4 \cdot \left[\frac{1}{12} \frac{\bar{E}}{ECT} \right]^k h^{(3k-1/2)} = C_1 Z^{(-2k+\frac{1}{2})} \left[\frac{\pi^2}{3} \frac{\bar{E}}{ECT} \right]^k h^{(3k-1/2)} \quad (19)$$

Zmienna C_5 zdefiniowana równaniem (19) zależy nie tylko od początkowo przyjętej stałej C_1 ale również od kilku innych zmiennych:

- przyjętej wartości r i w konsekwencji również wartości k ,
- efektywnej sprężystości \bar{E} ,
- obwodu podstawy Z ,
- grubości h tektury falistej,
- oraz ECT ,

dlatego założenie, że C_5 można przyjąć a priori i zawsze ma stałą i uniwersalną wartość bez względu na typ i rozmiar opakowania klapowego szybko okazało się nieprawdziwe. W praktyce C_5 dobiera się przez dopasowanie wyniku otrzymanego z równania (18) z danymi eksperymentalnymi uzyskanymi dla pewnej grupy badanych opakowań i pewnych wybranych jakości tektur. Jest to skuteczny i zarazem prosty sposób, jednakże jego uniwersalność krytykowana jest przez wielu praktyków.

Żeby lepiej zrozumieć fenomen formuły McKee przyjmijmy wartości zmiennych r i k zgodnie z sugestią jej autorów. Niech więc $r = 3/4$ i w konsekwencji $k = 1 - r = 1/4$. Przyjęcie takich właśnie wartości ma pewne podstawy empiryczne, ale niestety nie ma podstaw matematycznych czy fizycznych - w praktyce można przyjąć dowolne wartości. Zaproponowana przez autorów proporcja powoduje, że wartość ECT w powyższych równaniach ma pewną preferencję (wyższy wykładnik). To może mieć pewne uzasadnienie w przypadku niskich i sztywnych opakowań, w których wyoboczenie poszczególnych paneli faktycznie ma mniejszy wpływ na nośność opakowania. Natomiast dla opakowań wysokich lub opakowań utworzonych z tektury o niskim profilu (E lub F)

preferencja powinna być dokładnie odwrotna. W takich właśnie przypadkach predykcja nośności za pomocą formuły McKee obarczona jest największym błędem.

Pomijając pierwotną motywację autorów, przyjmijmy wartość współczynnika $r = 3/4$, równanie (10a) przyjmuje zatem postać:

$$P = C_1 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \quad (20a)$$

Równanie (10b) przekształca się natomiast do:

$$P = C_3 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot b^{(-1/2)} \quad (20b)$$

gdzie:

$$C_3 = C_1 \sqrt{2\pi} \quad (21)$$

Indeks BCT dla pojedynczego panelu opisany równaniem (12) przyjmuje teraz postać:

$$\begin{aligned} BCT &= C_3 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot b^{(-1/2)} \cdot b = \\ &= C_3 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot \sqrt{b} \end{aligned} \quad (22)$$

A dla opakowania z czterema panelami o takich samych wymiarach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} BCT &= C_3 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot b^{(-1/2)} \cdot Z = \\ &= C_4 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot \sqrt{Z} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$$C_4 = C_1 2\sqrt{2\pi} \quad (24)$$

Przy założeniu prostokątnej podstawy opakowania mamy:

$$BCT = C_4 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \bar{D}^{(1/4)} \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad (25)$$

Podobne uproszczenia możemy wprowadzić do równania (17), które przyjmuje teraz postać:

$$BCT = C_4 \cdot ECT^{(3/4)} \cdot \left[\frac{\bar{E}h^3}{12} \right]^{(1/4)} \cdot \sqrt{Z} \quad (26)$$

Równanie (18) natomiast upraszcza się ponownie do najbardziej popularnej wersji formuły McKee:

$$BCT = C_5 \cdot ECT \cdot \sqrt{hZ} \quad (27)$$

jednakże w tym przypadku współczynnik C_5 opisany jest następującym równaniem:



$$C_5 = C_4 \cdot \left[\frac{1}{12} \frac{\bar{E}h}{ECT} \right]^{(1/4)} = 2C_1 \left[\frac{\pi^2}{3} \frac{\bar{E}h}{ECT} \right]^{(1/4)} \quad (28)$$

Stała C_5 jest teraz opisana znacznie prostszym równaniem niż (19) ale wciąż zależy od: (1) efektywnej sprężystości tektury \bar{E} ; (2) ECT i (3) grubości tektury h . W tym newralgicznym punkcie autorzy formuły McKee, na podstawie obszernych empirycznych badań zauważyli, że proporcja pomiędzy iloczynem $\bar{E}h$, a wartością ECT przyjmuje w większości przypadków pewną stałą wartość p . Założenie więc, że:

$$\frac{\bar{E}h}{ECT} = p = const \quad (29)$$

pozwoiliło na uproszczenie C_5 w równaniu (28) do pewnej stałej, którą wciąż należy dobrać, jednakże formalnie nie jest już ona zależna od innych zmiennych w równaniu (26):

$$C_5 = C = C_1 \left(\frac{\pi^2 p}{3} \right)^{1/4} \quad (30)$$

Ostatecznie równanie (27) ze stałą C_5 opisaną równaniem (30) jest najczęściej stosowanym w praktyce predyktorem nośności opakowania z tektury falistej. Pomimo, że w równaniu tym pominięto efekty ortotropii i dla uproszczenia przyjęto, że opakowanie ma wszystkie wymiary równe, precyzja szacowania za jego pomocą jest zaskakująco wysoka. Głównym czynnikiem odpowiedzialnym za skuteczność tego równania jest współczynnik C_5 , który pozwala na łatwe dopasowanie wyników estymacji do wyników fizycznego eksperymentu.

Błędy szacowania obciążenia krytycznego

Poniżej zestawiono wyniki analiz za pomocą różnych wzorów analitycznych służących do predykcji wytrzymałości na wyboczenie. W pierwszej kolejności przeanalizowano błędy estymacji obciążenia krytycznego pojedynczego panelu, uzyskane za pomocą różnych równań:

- równanie (4)
- równanie (5)
- równanie (7)
- równanie (9)

Równanie (7) jest najbardziej precyzyjnym opisem obciążenia krytycznego, dlatego zostało wybrane do obliczenia wartości referencyjnych. Wyniki uzyskane za pomocą pozostałych równań przedstawiono w postaci błędów oszacowania, który wyliczono za pomocą następującego wzoru:

$$e_i = 100 \left(1 - \frac{p_i}{p_0} \right) \quad (31)$$

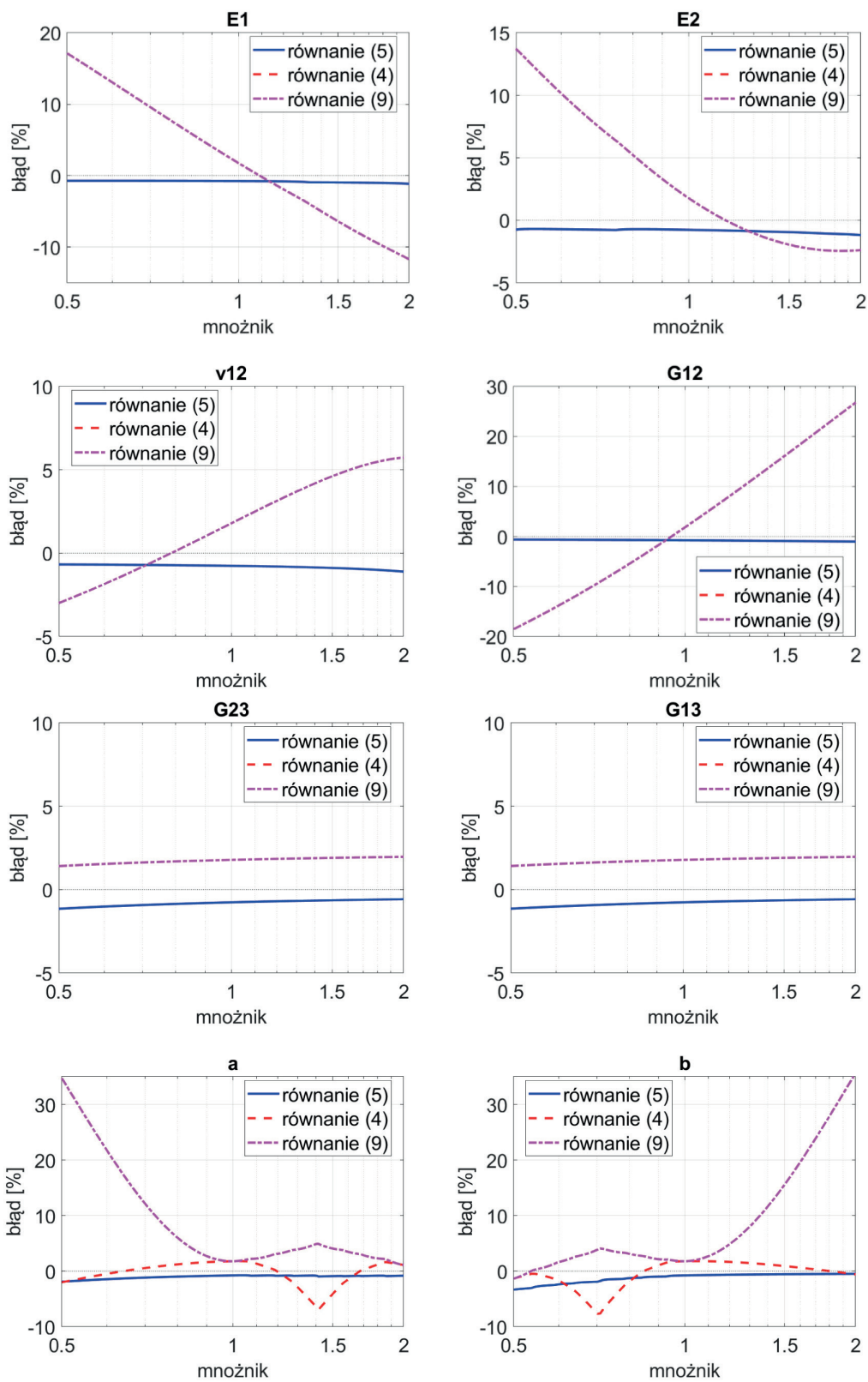
gdzie:

p_i – obciążenie krytyczne obliczone za pomocą wzoru (4), (5) lub (9), p_0 – referencyjne obciążenie krytyczne obliczone za pomocą równania (7).

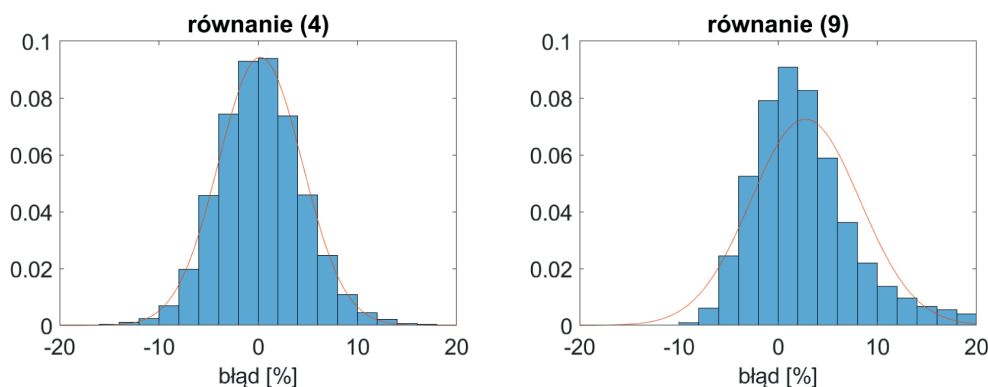
Błędy oszacowania przedstawiono w funkcji zmiany parametrów materiałowych, grubości tektury falistej oraz wymiarów pudła. Każdy z nich został zmieniany w zakresie od 50% do 200% początkowej wartości. Wszystkie analizy przeprowadzono dla 250 różnych modeli referencyjnych, w których parametry były dobrane w następujący sposób: E_{11} i E_{22} w przedziale: 200-600 MPa, G_{12} , ν_{13} oraz G_{23} i G_{13} wyznaczono za pomocą wzorów przedstawionych w pracy [1], wymiary a oraz b przyjęto w granicach od 250 mm do 750 mm, natomiast grubość w przedziale: 1-3 mm. Wartości te dobrano w taki sposób, aby w drugim kroku, w którym zmieniano wszystkie parametry niezależnie w przedziale 50-200%, nie generować nierealistycznych wyników. Wyniki zaprezentowane na wykresach są wartościami uśrednionymi z wszystkich 250 przypadków. Zaprojektowana w taki sposób analiza gwarantuje uzyskanie poprawnego oszacowania dokładności poszczególnych wzorów w całej dziedzinie parametrów modelu.

Na wykresach 2a-2h pokazano błędy oszacowania obciążenia krytycznego w funkcji wszystkich parametrów modelu. Błędy te powstają w skutek braku wrażliwości wyników uzyskanych za pomocą wybranych równań na poszczególne parametry modelu. Na wykresach 2a i 2b pokazano zmianę uśrednionego błęd oszacowania siły krytycznej uzyskaną dla różnych wartości efektywnej sztywności E_1 (w kierunku MD) i E_2 (w kierunku CD). Na obu wykresach można zauważyć wyraźny wzrost błęd oszacowania obliczony za pomocą wzorów (4) i (9) szczególnie w przypadku gdy sztywności efektywne osiągają wartości o połowę niższe niż referencyjne. Podobne zależności obserwujemy na wykresach 2c-2f. Największy błąd oszacowania (sięgający 30%) obserwujemy dla wyników uzyskanych za pomocą równania (9), szczególnie gdy proporcje wymiarów a/b są różne od 1. Wyniki uzyskane za pomocą równania (4) charakteryzują się znacznie większą wrażliwością na parametry geometryczne, przez co błąd oszacowania nie przekracza 10% nawet dla dużych różnic wymiarów a i b . Błędy generowane przez równania (4) i (9), wynikające z braku wrażliwości na zmiany parametrów materiałowych mogą być kompensowane za pomocą doboru empirycznie współczynników C . W celu uniknięcia każdorazowego wyznaczania tych współczynników można wykorzystać równanie (5), które charakteryzuje się wysoką wrażliwością na parametry materiałowe w dużym zakresie: od 50% do 200% wartości referencyjnych. Wykorzystanie wzoru (5) do wyznaczenia





Rys. 2. Błędy oszacowania siły krytycznej w przypadku zmian pojedynczego parametru: (a) efektywna sztywność w kierunku MD, (b) efektywna sztywność w kierunku CD, (c) współczynnik Poissona, (d) efektywna sztywność postaciowa, (e) efektywna sztywność transwersalna w płaszczyźnie 2-3, (f) efektywna sztywność transwersalna w płaszczyźnie 1-3, (g) wysokość ściany opakowania, (h) szerokość ściany opakowania



Rys. 3. Błędy oszacowania z uwzględnieniem jednoczesnych wahań wszystkich parametrów modelu

wartości obciążenia krytycznego pozwala na uzyskanie wyników, w których błąd oszacowania będzie mniejszy od 5% w przypadku zmiany każdego z parametrów.

Na wykresach 3a i 3b zestawiono błędy oszacowania z uwzględnieniem kilku perturbacji działających jednocześnie. Podobnie jak w poprzedniej analizie, wszystkie parametry modelu perturbowane są stochastycznie w granicach 50-200% wartości referencyjnych, co powoduje, że proporcja wymiarów opakowania może wynosić w ekstremalnym przypadku 4 do 1 lub 1 do 4. W równaniu (1) obciążenie krytyczne podniesione jest do potęgi $k = 1/4$, dlatego na wykresach 3a i 3b zestawiono wyniki uzyskane za pomocą równań (4) i (9), ale również podniesione do potęgi równej $1/4$. Zastosowanie wykładnika mniejszego od 1 powoduje zmniejszenie wartości jednostkowych błędów oszacowania. Jednakże, uwzględnienie kilku działających jednocześnie perturbacji parametrów modelu powoduje, że błąd oszacowania jest kumulowany i w wybranych konfiguracjach osiąga wartość nawet 25%.

Wnioski i podsumowanie

W pracy poddano szczegółowej analizie popularną metodę zaproponowaną w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku przez McKee i in. do estymacji wytrzymałości na ściskanie pudeł kładowych z tektury falistej. Wyprowadzone zostały współczynniki i stałe wykorzystane w równaniach, popularnie zwanych formułami McKee. Celem pracy było sprawdzenia granic stosowalności tych formuł oraz wyznaczenie wielkości błędu oszacowania wynikającego z zastosowania różnych uproszczeń. W pracy skupiono uwagę głównie na opisie obciążenia krytycznego, które jest jednym z dwóch głównych składników opisujących nośność opakowań z tektury falistej. Wykazano, że uproszczony opis obciążenia krytycznego, wykorzystany w formułach McKee, mimo że dla pewnych proporcji wymiarów opakowania generuje błędy

oszacowania na poziomie nawet 30%, to w większości typowych przypadków pozwala na uzyskanie poprawnych wyników. Warunkiem jest jednak zastosowanie odpowiednich współczynników korygujących, które należy dobrać indywidualnie dla każdego analizowanego przypadku. Wykorzystanie bardziej precyzyjnych wzorów pozwalana na uniknięcie procedury dopasowania empirycznych współczynników, ale wiąże się z potrzebą identyfikacji większej ilości parametrów materiałowych tektury falistej.

Artykuł recenzowany

LITERATURA

- [1] Baum G.A., Habeger C., Fleischman H. 1981. "Measurement of the orthotropic elastic constants of paper". IPC technical paper series number 117.
- [2] Garbowski T., Garbowska L. 2018. "Computer aided estimation of corrugated board box compression strength. Part 2. The sensitivity analysis in selected laboratory tests of corrugated board". *Przegląd Papierniczy* 74 (8) : 435-440.
- [3] Garbowski T., Garbowska L. 2018. "Computer aided estimation of corrugated board box compression strength Part 3. Laboratory-numerical procedure for an identification of elastic properties of corrugated board". *Przegląd Papierniczy* 74 (9) : 577-585.
- [4] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Numerical strength estimate of corrugated board packages. Part 1. Theoretical assumptions in numerical modeling of paperboard Packages". *Przegląd Papierniczy* 70 (4) : 219-222.
- [5] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Numerical strength estimate of corrugated board packages. Part 2. Experimental Tests and numerical analysis of paperboard packages". *Przegląd Papierniczy* 70 (5) : 277-281.
- [6] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Homogenization of corrugated paperboard. Part 1. Analytical homogenization". *Przegląd Papierniczy* 70 (6) : 345-349.
- [7] Garbowski T., Jarmuszcak M. 2014. "Homogenization of corrugated paperboard. Part 2. Numerical homogenization". *Przegląd Papierniczy* 70 (7) : 390-394.
- [8] McKee R.C., Gander, Wachuta. 1963. "Compression strength formula for corrugated boxes" *Paperboard Pack.* 48, 8.

