

Numeryczna analiza ścinania poprzecznego płyt z tektury falistej z warstwą pofalowaną o niestandardowej geometrii

Numerical analysis of transverse shear in corrugated board with non-standard fluting geometry

TOMASZ GARBOWSKI

DOI: 10.15199/54.2025.5.1

W artykule przedstawiono wyniki symulacji numerycznych ścinania poprzecznego płyty z tektury falistej, w której warstwa środkowa (fluting) przybiera niestandardowe, koncepcyjne kształty geometryczne. Analizie poddano sześć profili: sinusoidalny, półkolisty, trójkątny, trapezowy, prostokątny i balonikowy. Obliczenia przeprowadzono metodą elementów skończonych z uwzględnieniem anizotropii materiałowej papieru oraz nieliniowości geometrycznych i materiałowych. Do modelowania uszkodzeń zastosowano kryterium Tsai-Wu, umożliwiające śledzenie postępującej degradacji struktury aż do jej całkowitego zniszczenia. Wyniki ukazują zróżnicowane zachowanie analizowanych geometrii pod wpływem ścinania – od gwałtownych uszkodzeń w profilach o ostrych narożach, po stopniową degradację w profilach o łagodnych krzywiznach. Przeprowadzone analizy mogą stanowić podstawę do projektowania nowoczesnych struktur opakowaniowych o zoptymalizowanej odporności na złożone stany naprężeń.

Słowa kluczowe: tektura falista, ścinanie poprzeczne, kształt fali, analiza numeryczna, metoda elementów skończonych, ochrona produktów, fluting futurystyczny, opakowania transportowe

This paper presents the results of numerical simulations of transverse shear behavior in corrugated board with a non-standard, conceptual fluting layer geometry. Six profiles were analyzed: sinusoidal, semicircular, triangular, trapezoidal, rectangular, and balloon-shaped. Calculations were carried out using the finite element method, incorporating the orthotropic nature of paper as well as geometric and material nonlinearities. To model progressive damage, the Tsai-Wu failure criterion was applied, enabling simulation of stiffness degradation and structural failure. The results revealed significant differences in how the analyzed geometries responded to shear – ranging from abrupt failure in angular profiles to smoother damage progression in rounded shapes. These simulations provide insight into how wave geometry influences shear load capacity, highlighting the potential to optimize structural packaging designs for complex stress states.

Keywords: corrugated board, transverse shear, fluting geometry, numerical analysis, finite element method, product protection, futuristic fluting, transport packaging

Wprowadzenie

Tektura falista pozostaje jednym z najczęściej wykorzystywanych materiałów opakowaniowych w sektorze przemysłowym i konsumenckim. Jej popularność wynika z korzystnych właściwości mechanicznych, niskiej gramatury oraz możliwości recyklingu. Wraz z rosnącym zapotrzebowaniem na oszczędność surowców i rozwiązania zrównoważone, uwaga kierowana jest w stronę struktur o zoptymalizowanej geometrii, umożliwiających

Introduction

Corrugated board remains one of the most widely used packaging materials in both industrial and consumer sectors. Its popularity stems from favorable mechanical properties, low weight, and full recyclability. With increasing demands for raw material savings and sustainable solutions, attention is shifting toward geometrically optimized structures that use material more efficiently [1, 7, 8, 26]. The shape of the fluted layer plays a key role in this regard,

Dr hab. inż. **T. Garbowski**, prof. UPP (tomasz.garbowski@up.poznan.pl; ORCID: 0000-0002-9588-2514), Uniwersyteckie Centrum Ekomateriałów, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu



bardziej efektywne wykorzystanie materiału [1, 7, 8, 26]. W tym kontekście kluczowe znaczenie ma kształt warstwy pofalowanej, który wpływa nie tylko na wytrzymałość na zginanie i sztywność zginania, ale także na sztywność poprzeczną, istotną w przypadku złożonych stanów obciążenia, takich jak zginanie ze skręcaniem czy ściskanie mimośrodowe [9, 10, 14, 15].

Choć profil sinusoidalny wciąż pozostaje standardem przemysłowym, rozwój technologii formowania – takich jak cyfrowe cięcie, termoformowanie czy drukowanie addytywne – umożliwia badanie bardziej złożonych kształtów fali, które mogą oferować przewagę mechaniczną bez znaczącego zwiększenia zużycia materiału [17, 23, 24, 26, 27, 39].

Większość badań dotyczących mechaniki tektury falistej koncentrowała się na wytrzymałości na zginanie (ECT i FCT), sztywności globalnej oraz relacjach między geometrią fali, kosztami produkcji i możliwością wytworzenia [6, 9, 13, 16, 25, 32, 34, 36]. Wiele prac podkreśla silną zależność między geometrią fali a lokalną nośnością, sugerując, że zoptymalizowany fluting może znacząco poprawić wytrzymałość przy jednoczesnej minimalizacji zużycia materiału [11, 29, 30, 33, 35, 37, 45].

Równolegle rozwijane są metody symulacji numerycznej – w tym podejścia homogenizacyjne – pozwalające przewidywać zachowanie tektury bez konieczności modelowania pełnej mikrostruktury [6, 12, 20, 22–24, 37, 38, 44]. Narzędzia te są szczególnie przydatne w analizie nowych koncepcji falowania, które nie zostały jeszcze wdrożone do produkcji, ale mogą stanowić przyszłościową alternatywę dla rozwiązań standardowych.

Ostatnie postępy obejmują również zastosowanie sztucznej inteligencji oraz technik opartych na obrazowaniu do automatyzacji projektowania i oceny strukturalnych rozwiązań opakowaniowych [19, 31, 40, 42, 43], co umożliwia szybkie generowanie i ocenę niestandardowych profili.

Z ekonomicznego punktu widzenia geometria flutingu wpływa także na złożoność produkcji, liczbę warstw oraz zużycie papieru [8, 26, 27, 39, 47]. Dlatego poprawa właściwości mechanicznych musi być równoważona z wykonalnością technologiczną i kosztami wytwarzania.

Dotychczasowe badania potwierdzają, że kształt fali wpływa nie tylko na właściwości mechaniczne [22], ale również na koszt [21]. Szczególnie obiecujące wydają się kształty zbliżone do spline lub trapezowe [2, 18, 29, 35, 41], choć ich zachowanie pod kątem ścinania pozostaje słabo poznane [3–5].

W pracy Andrzejaka i in. [1] wykazano, że modyfikacje strukturalne, takie jak perforacje, mogą wpływać na rozkład obciążeń w opakowaniach, co sugeruje, że staranne zaprojektowanie kształtu fali może przynieść podobne korzyści. Mrówczyński i in. [40] podkreślili znaczenie niestandardowych geometrii w symulacjach opakowań, a praca [39] przedstawiła dane eksperymentalne dla różnych konfiguracji zginania.

influencing not only compressive strength and bending stiffness but also transverse shear stiffness, which is critical under combined loading conditions such as bending with torsion or eccentric compression [9, 10, 14, 15].

While the sinusoidal profile remains the industrial standard, advancements in forming technologies – such as digital cutting, thermoforming, and additive manufacturing – enable the exploration of more complex waveforms that may offer mechanical advantages without significantly increasing material usage [17, 23, 24, 26, 27, 39].

Most research on corrugated board mechanics has focused on compressive strength (ECT and FCT), overall stiffness, and the relationship between flute shape, production cost, and manufacturability [6, 9, 13, 16, 25, 32, 34, 36]. Many studies highlight a strong correlation between flute geometry and local load-bearing capacity, suggesting that optimized fluting can significantly improve strength while minimizing material [11, 29, 30, 33, 35, 37, 45].

At the same time, numerical simulation methods – including homogenization – are being developed to predict board behavior without modeling the full microstructure [6, 12, 20, 22–24, 37, 38, 44]. These tools are particularly useful for studying novel fluting concepts, which are not yet in production but could serve as future alternatives to standard designs.

Recent developments also include the use of artificial intelligence and image-based techniques for automating the design and evaluation of structural packaging solutions [19, 31, 40, 42, 43], allowing for the rapid generation and assessment of unconventional profiles.

From an economic standpoint, fluting geometry also impacts the complexity of manufacturing, the number of layers, and paper usage [8, 26, 27, 39, 47]. Therefore, mechanical improvements must be balanced against technological feasibility and production costs.

Previous studies confirm that flute shape influences not only mechanical performance but also cost [18]. Especially promising are spline-like and trapezoidal shapes [2, 18, 29, 35, 41], although their shear performance remains underexplored [3–5].

In the study by Andrzejak et al. [1], structural modifications such as perforations were shown to affect load distribution in packaging, suggesting that careful waveform design may yield similar benefits. Mrówczyński et al. [40] highlighted the relevance of non-standard geometries in packaging simulations, while [39] presented experimental results for various compressive configurations.

This work contributes to that trend by analyzing the performance of triangular, semicircular, rectangular, trapezoidal, and balloon-like fluting under transverse shear. Unlike studies focusing on flat crush behavior, this research emphasizes shear-related properties, where transverse stiffness is key. A nonlinear finite element model with the Tsai-Wu damage criterion was used to



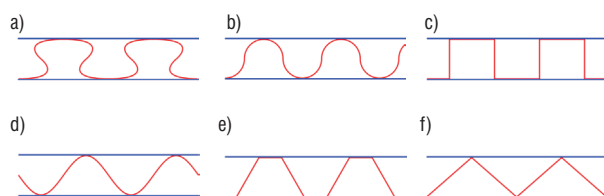
Niniejsza praca wpisuje się w ten nurt, analizując zachowanie profili: trójkątnego, półkolistego, prostokątnego, trapezowego oraz balonikowego w warunkach ścinania poprzecznego. W przeciwieństwie do badań koncentrujących się na zginięciu płaskim, niniejsza analiza skupia się na właściwościach związanych ze ścinaniem, gdzie sztywność transversalna odgrywa kluczową rolę. Do symulacji i porównania odpowiedzi strukturalnej oraz rozwoju uszkodzeń zastosowano nieliniowy model elementów skończonych z kryterium zniszczenia Tsai-Wu.

Geometria flutingu

W analizie uwzględniono sześć wariantów geometrycznych warstwy pofalowanej, zaprojektowanych jako koncepcyjne, nie stosowane dotąd w praktyce produkcyjnej profile. Wszystkie rozważane kształty miały jednakową wysokość nominalną – 3 mm oraz stałą długość okresu, co umożliwiło ich porównanie przy zachowaniu identycznych warunków brzegowych i obciążeniowych. Zmienność dotyczyła wyłącznie lokalnego kształtu segmentów tworzących falę.

Rozpatrywane geometrie można scharakteryzować następująco:

- **Sinusoidalna** – profil odniesienia o klasycznym, płynnie zmieniającym się przebiegu fali, odpowiadający standardowi przemysłowemu. Długość jednego cyklu fali przyjęto jako 6 mm;
- **Półkolista** – fala zbudowana z łuków o jednakowym promieniu równym połowie wysokości (1,5 mm), połączonych stycznie, co zapewnia łagodne przejścia i ciągłość krzywizn;
- **Trójkątna** – zygzakowata forma o ostrych wierzchołkach, z dużymi lokalnymi kątami nachylenia, które sprzyjają powstawaniu koncentracji naprężeń w punktach załamania;
- **Trapezowa** – fala o segmentach poziomych i ukośnych, tworząca charakterystyczny profil trapezu, który oferuje dobrą nośność pionową przy jednoczesnym ryzyku występowania lokalnych stref naprężeń na granicach segmentów;
- **Prostokątna** – kształt z pionowymi bokami i poziomymi górnymi oraz dolnymi odcinkami, zapewniający wysoką sztywność w kierunku osiowym, ale narażony na lokalne osłabienia w narożach;



Rys. 1. Geometrie analizowanych kształtów flutingu: (a) balonikowy, (b) półkolista, (c) prostokątny, (d) sinusoidalny, (e) trapezowy, (f) trójkątny
Fig. 1. Geometries of the analyzed fluting shapes: (a) balloon-shaped, (b) semicircular, (c) rectangular, (d) sinusoidal, (e) trapezoidal, (f) triangular

simulate and compare the structural response and failure development of different fluting geometries.

Fluting geometries

The analysis included six geometric variants of the corrugated layer, designed as conceptual profiles not yet used in industrial production. All considered shapes had the same nominal height of 3 mm and a fixed wave period length, which enabled their comparison under identical boundary and loading conditions. The only variation concerned the local shape of the segments forming the wave.

The analyzed geometries can be characterized as follows:

- **Balloon-shaped** – a biomimetic-inspired variant characterized by smooth transitions between crests and troughs, which may support a more uniform stress distribution under transverse loading.
- **Rectangular** – a shape with vertical sides and horizontal top and bottom segments, providing high axial stiffness but prone to local weaknesses at the corners.
- **Semicircular** – a waveform composed of arcs with a constant radius equal to half the wave height (1.5 mm), joined tangentially to ensure smooth transitions and curvature continuity.
- **Sinusoidal** – the reference profile with a classic, smoothly varying wave shape, corresponding to the industrial standard. The period length was set to 6 mm.
- **Trapezoidal** – a waveform with horizontal and inclined segments forming a characteristic trapezoidal shape that offers good vertical stiffness but may generate localized stress zones at the segment transitions.
- **Triangular** – a zigzag form with sharp peaks and large local inclination angles, which promote stress concentrations at the fold points.

These designed profiles differ not only in their geometric form but also in their potential influence on structural behavior under transverse shear, making them particularly interesting for further engineering analysis.

Materials and methods

Numerical model

To perform the numerical analysis of the behavior of corrugated board under transverse shear conditions, a dedicated computational model based on the finite element method (FEM) was developed. The calculations were carried out in the MATLAB environment using a custom code capable of simulating nonlinear problems in the mechanics of deformable solids, taking into account both geometric effects and material constitutive nonlinearities.

The geometric model reproduces a two-dimensional cross-section (plane strain condition) of three-layer corrugated board,

• **Balonikowa** – wariant inspirowany rozwiązaniami biomimetycznymi, cechujący się łagodnymi przejściami między wypukłościami i wklęsłościami, co może sprzyjać równomiernemu rozkładowi naprężeń przy obciążeniu poprzecznym.

Zaprojektowane profile różnią się od siebie nie tylko formą geometryczną, ale także potencjalnym wpływem na zachowanie struktury pod wpływem ścinania poprzecznego, co czyni je szczególnie interesującymi z punktu widzenia dalszych analiz inżynierskich.

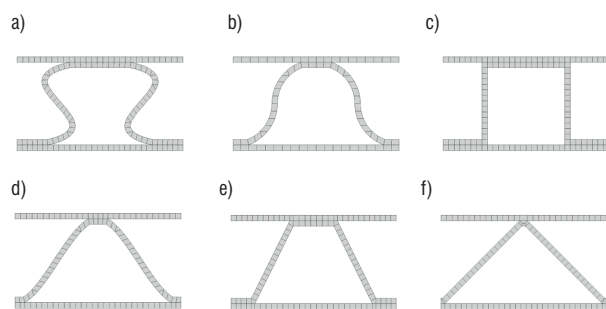
Materiały i metody

Model obliczeniowy

W celu przeprowadzenia analizy numerycznej zachowania płyty z tektury falistej w warunkach ścinania poprzecznego, opracowano model obliczeniowy bazujący na metodzie elementów skończonych (MES). Obliczenia zrealizowano w środowisku MATLAB, z wykorzystaniem własnego kodu umożliwiającego symulację nieliniowych problemów mechaniki ciał odkształcalnych, uwzględniającego zarówno efekty geometryczne, jak i nieliniowości konstytutywne materiału.

Model geometryczny odtwarza przekrój poprzeczny trójwarstwowej tektury w ujęciu dwuwymiarowym (stan płaski), obejmując górną i dolną warstwę płaską (linery) oraz warstwę środkową (fluting) o zróżnicowanej geometrii. Rozważano sześć niestandardowych kształtów fali: sinusoidalny (referencyjny), półkolisty, trójkątny, trapezowy, prostokątny oraz balonikowy. Wszystkie profile miały jednakową wysokość nominalną (3 mm) i stałą długość pojedynczego cyklu fali, co zapewniało porównywalność warunków obciążenia (rys. 2).

Każda warstwa materiału została zamodelowana osobną siatką ośmiowęzłowych elementów skończonych ze zredukowanym całkowaniem. Każdemu elementowi przypisano lokalny układ osi materiałowych, odzwierciedlający ortotropowy charakter papieru. Do modelowania nieliniowego zachowania materiału zastosowano



Rys. 2. Model obliczeniowy – siatka elementów skończonych: (a) fluting balonikowy, (b) fluting półkolisty, (c) fluting prostokątny, (d) fluting sinusoidalny, (e) fluting trapezowy, (f) fluting trójkątny

Fig. 2. Computational model – finite element mesh: (a) balloon-shaped fluting, (b) semicircular fluting, (c) rectangular fluting, (d) sinusoidal fluting, (e) trapezoidal fluting, (f) triangular fluting

including the top and bottom flat layers (liners) and a middle corrugated layer (fluting) with varying geometry. Six non-standard fluting shapes were considered: sinusoidal (reference), semicircular, triangular, trapezoidal, rectangular, and balloon-shaped. All profiles had the same nominal height (3 mm) and a fixed wavelength, ensuring comparable loading conditions across all variants (Fig. 2).

Each material layer was modeled using a separate mesh composed of eight-node finite elements with reduced integration. A local material coordinate system was assigned to each element to reflect the orthotropic nature of paper. To model the nonlinear behavior of the material, the Tsai-Wu failure criterion [48] was applied, which accounts for the asymmetry between tensile and compressive strength as well as the effects of combined stress states. The general form of the criterion is as follows:

$$F(\sigma) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq 1$$

where:

σ_i – stress components in the material coordinate system,

F_i – linear strength coefficients (accounting for strength asymmetry),

F_{ij} – interaction coefficients,

the inequality defines the failure envelope – its violation indicates the onset of material failure or degradation.

It was assumed in the analysis that once the failure condition ($F(\sigma) > 1$) is met, the element locally loses its stiffness – symbolizing the initiation of damage and the degradation of load-carrying capacity. As the load increases, the damage propagates through the structure, allowing the simulation of the complete failure process of the cross-section.

The simulations were carried out under quasi-static conditions, separately for each fluting variant. Unlike the classical Flat Crush Test (FCT), a loading scheme was applied that reproduces a transverse shear state – the top and bottom surfaces of the model were subjected to opposing horizontal displacements, while vertical movements were fully constrained at the bottom. This configuration represents the typical deformation state observed in corrugated board panels subjected to bending with torsion or in tests evaluating the transverse shear modulus [26].

Material properties (for all layers)

Material data reflect typical corrugated board paper values and are consistent with literature and previous studies [8-13]. For each layer, the following orthotropic properties were used (see Table 1).

Results and comparative analysis

Based on the numerical simulations, force–displacement curves were generated for all analyzed fluting geometries. The results, presented in Figure 3, reveal clear differences in initial



kryterium zniszczenia Tsai-Wu [48], uwzględniające asymetrię wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie oraz efekty sprzężonego stanu naprężenia. Kryterium ma postać ogólną:

$$F(\sigma) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq 1$$

gdzie:

σ_i – składowe naprężenia w układzie głównym,

F_i – współczynniki liniowe (związane z różnicą wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie),

F_{ij} – współczynniki kwadratowe (określające interakcje naprężeń), nierówność oznacza warunek trwałości materiału – jego przekroczenie prowadzi do lokalnego zniszczenia lub osłabienia warstwy.

W analizie przyjęto, że po przekroczeniu warunku zniszczenia ($F(\sigma) > 1$), element traci lokalnie swoją sztywność, co symbolizuje inicjację uszkodzeń i degradację nośności. W miarę narastania obciążenia, uszkodzenia te propagują się w strukturze, co umożliwia symulację pełnego procesu zniszczenia przekroju.

Symulacje przeprowadzono w warunkach quasistatycznych, dla każdego wariantu flutingu osobno. W przeciwieństwie do klasycznego testu FCT, zastosowano układ obciążeń odwzorowujący stan ścinania poprzecznego – górna i dolna powierzchnia modelu podlegały równoległym przemieszczeniom poziomym o przeciwnych zwrotach, przy jednoczesnym zablokowaniu przesuwów pionowych dolnej powierzchni. Taki schemat odwzorowuje typowy stan deformacji występujący w płytach tekturowych poddanych zginaniu ze skręceniem lub w testach oceniających moduł ścinania transwersalnego [26].

Parametry materiałowe (dla wszystkich warstw)

Parametry materiałowe przypisane poszczególnym warstwom odpowiadają typowym właściwościom papierów stosowanych w produkcji tektury falistej i zostały zaczerpnięte z literatury oraz wcześniejszych badań [8-13]. Szczegółowe dane obejmują moduły sprężystości w kierunkach MD i CD, współczynniki Poissona, moduły Kirchhoffa oraz wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie. Zestawienie przyjętych wartości materiałowych przedstawiono w tabeli 1.

Wyniki i analiza porównawcza

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych opracowano wykresy siła–przemieszczenie dla wszystkich analizowanych kształtów flutingu. Wyniki przedstawione na rysunku 3 ukazują wyraźne różnice w sztywności początkowej, wartości maksymalnej siły ścinającej oraz w sposobie degradacji struktury w kolejnych etapach obciążenia.

Najwyższe wartości siły maksymalnej uzyskano dla profilu trójkątnego (~2,9 N), jednak po osiągnięciu piku nośność gwałtownie spadła, co wskazuje na kruchy charakter zniszczenia. Podobne,

Tabela 1. Parametry materiałowe papierów składowych
Table 1. Material properties of the constituents papers

Właściwość Property	Liner (górny i dolny) Liner (Top & Bottom)	Fluting (środkowy) Fluting (Medium)
Moduł Younga MD Young's modulus, MD	5000 MPa	4000 MPa
Moduł Younga CD Young's modulus, CD	1500 MPa	1000 MPa
Współczynnik Poissona MD-CD Poisson's ratio MD-CD	0,25	0,25
Moduł Kirchhoffa MD-CD Shear modulus MD-CD	500 MPa	300 MPa
Wytrzymałość na rozciąganie MD Tensile strength MD	40 MPa	25 MPa
Wytrzymałość na rozciąganie CD Tensile strength CD	15 MPa	10 MPa
Wytrzymałość na ściskanie MD Compressive strength MD	30 MPa	20 MPa
Wytrzymałość na ściskanie CD Compressive strength CD	10 MPa	8 MPa

Legenda: MD – kierunek produkcji papieru, CD – kierunek poprzeczny

Note: MD – Machine Direction, CD – Cross Direction

stiffness, maximum shear force, and the degradation pattern of the structure at subsequent stages of loading.

The highest peak force was observed for the triangular profile (~2.9 N), but the load-carrying capacity dropped sharply after reaching the maximum, indicating a brittle failure behavior. A similar, though less abrupt decline was noted for the sinusoidal profile (~1.8 N). In both cases, local stress concentrations developed at sharp transitions and curvature peaks (Fig. 4d and 4f).

The trapezoidal profile showed a distinctly more favorable response. Despite the presence of angular segments, its force–displacement curve was stable and monotonic – with no clear peak or sudden drop. As the displacement increased, the shear force continued to rise gradually, reaching values comparable to the sinusoidal profile but without signs of instability (Fig. 4e). This suggests high deformation tolerance in the trapezoidal structure.

The semicircular and rectangular profiles exhibited significantly lower peak forces (~0.85 N and ~0.35 N, respectively), but their responses were smooth and free from abrupt failure (Fig. 4b and 4c). The balloon-shaped profile proved to be particularly stable – despite its low initial stiffness, deformations were evenly distributed and damage developed progressively rather than suddenly (Fig. 4a).

choć mniej ostre załamanie zaobserwowano w profilu sinusoidalnym ($\sim 1,8$ N). W obu przypadkach wystąpiły lokalne koncentracje naprężeń w miejscach ostrych przejść i zakrzywień (rys. 4d i 4f).

Profil trapezowy wykazywał odmienne, bardziej korzystne zachowanie. Mimo ostrych przejść geometrycznych, jego charakterystyka siła–przesunięcie była stabilna i monotoniczna – bez wyraźnego maksimum ani gwałtownego spadku. W miarę narastania przemieszczeń, siła ścinająca stopniowo wzrastała, osiągając wartości porównywalne do sinusoidalnego, ale bez oznak niestabilności (rys. 4e). Świadczy to o wysokiej tolerancji struktury trapezowej na deformację.

Profile półkolisty i prostokątny osiągały znacznie niższe siły maksymalne ($\sim 0,85$ N i $\sim 0,35$ N), jednak ich odpowiedź była równomierna i pozbawiona nagłych zniszczeń (rys. 4b i 4c). Szczególnie stabilny okazał się profil balonikowy – mimo najniższej sztywności początkowej, deformacje rozkładały się równomiernie, a uszkodzenia nie lokalizowały się gwałtownie (rys. 4a).

Krzywe siła–przesunięcie

Rysunek 3 przedstawia wykresy siła–przesunięcie uzyskane z analizy numerycznej ścinania poprzecznego dla sześciu wariantów geometrii flutingu. Najwyższe wartości siły szczytowej osiągnął profil trójkątny ($\sim 2,9$ N), jednak jego charakterystyka wskazuje na bardzo gwałtowne zniszczenie przekroju po osiągnięciu maksimum. Profil sinusoidalny również wykazuje wyraźny pik, lecz spadek nośności następuje wolniej.

W przeciwieństwie do nich, profil trapezowy cechuje się stabilnym, niemal liniowym wzrostem siły bez załamania, co świadczy o dobrej tolerancji na deformację. Profile półkolisty, prostokątny i balonikowy wykazują mniejszą nośność, ale bardziej równomierny i kontrolowany przebieg obciążenia, bez gwałtownej utraty sztywności.

Dla każdego profilu wyznaczono wartość maksymalną siły ścinającej oraz odpowiadające mu przemieszczenie pionowe. Wyniki zestawiono w tabeli 2.

Strefy zniszczenia

Na rysunkach 4a–f zaprezentowano końcowe formy deformacji oraz lokalizację obszarów zniszczenia (ciemne strefy) dla poszczególnych geometrii flutingu:

Balonikowy (rys. 4a). Zniszczenia są rozproszone, bez wyraźnych punktów lokalizacji, co wskazuje na łagodne i stabilne zachowanie materiału.

Półkolisty (rys. 4b). Uszkodzenia pojawiają się w środkowych partiach fali, jednak mają umiarkowaną intensywność i nie prowadzą do całkowitej utraty nośności.

Force–displacement curves

Figure 3 shows the force–displacement curves obtained from transverse shear simulations for the six fluting geometry variants. The triangular profile reached the highest peak force (~ 2.9 N), but its response was characterized by a sudden structural failure after the maximum. The sinusoidal profile also exhibited a pronounced peak, though the loss of capacity was more gradual.

In contrast, the trapezoidal profile showed a stable, nearly linear increase in force without collapse, indicating strong deformation tolerance. The semicircular, rectangular, and balloon-shaped profiles demonstrated lower peak forces, but more uniform and controlled structural behavior without sudden stiffness loss.

For each profile, the maximum shear force and the corresponding vertical displacement were determined. The results are summarized in Table 2.

Failure zones

Figures 4a–f show the final deformation states and the locations of damage zones (marked as darkened areas) for each fluting geometry:

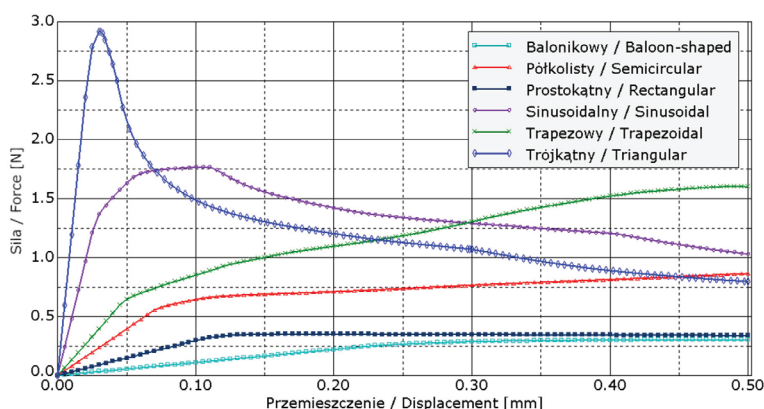
Balloon-shaped (Fig. 4a). Damage is dispersed without distinct localization points, indicating a smooth and stable material response.

Semicircular (Fig. 4b). Damage appears in the middle sections of the wave but remains moderate in intensity and does not lead to full structural failure.

Sinusoidal (Fig. 4c). Pronounced damage zones are visible in the regions of highest curvature, correlating with the rapid drop in force after reaching the peak.

Rectangular (Fig. 4d). Damage is concentrated mainly in the corners — areas with the steepest stress gradients.

Triangular (Fig. 4e). Very strong damage localization occurs at the peaks, which explains the abrupt loss of load capacity observed in the force–displacement curve.



Rys. 3. Porównanie krzywych siła–przesunięcie dla pięciu geometrii flutingu
Fig. 3. Comparison of force–displacement curves for the five fluting geometries



Tabela 2. Wartości maksymalnych sił zgniatających F_{max} dla analizowanych geometrii

Table 2. Maximum flat crush forces F_{max} for each fluting geometry

Kształt flutingu Fluting shape	P_{max} [N]	Przesunięcie [mm] Displacement [mm]	Wzrost względem sinusoidalnego [%] Increase vs. sinusoidal [%]
Balonikowy Balloon-shaped	0,303	0,500	-82,83
Półkolisty Semicircular	0,866	0,500	-50,94
Prostokątny Rectangular	0,350	0,185	-80,17
Sinusoidalny Sinusoidal	1,765	0,110	0
Trapezowy Trapezoidal	1,601	0,500	-9,29
Trójkątny Triangular	2,915	0,031	65,16

Sinusoidalny (rys. 4c). Widoczne są wyraźne strefy uszkodzeń w obszarach największych krzywizn, co koreluje z gwałtownym spadkiem siły po osiągnięciu maksimum.

Prostokątny (rys. 4d). Zniszczenia koncentrują się głównie w narożach – tam, gdzie występują największe gradienty naprężeń.

Trójkątny (rys. 4e). Bardzo silna lokalizacja uszkodzeń w wierzchołkach, co tłumaczy gwałtowne załamanie nośności widoczne na wykresie.

Trapezowy (rys. 4f). Uszkodzenia rozkładają się równomiernie wzdłuż pochyłych ścianek, a ich natężenie nie prowadzi do katastrofalnej utraty integralności struktury.

Dyskusja uzyskanych wyników

Uzyskane wyniki jednoznacznie pokazują, że geometria warstwy falistej w tekturze ma kluczowe znaczenie dla zachowania struktury w warunkach ścinania poprzecznego. Profile o ostrych przejściach (szczególnie trójkątny) cechują się dużą sztywnością początkową i wysokimi wartościami siły niszczącej, ale ich podatność na lokalne przeciążenia prowadzi do szybkiej i gwałtownej utraty nośności. Obszary największych naprężeń lokalizują się zwykle w narożach i wierzchołkach fali.

W tym kontekście profil trapezowy zasługuje na szczególną uwagę – mimo obecności ostrych krawędzi, wykazuje on dużą odporność na propagację uszkodzeń. Brak gwałtownego załamania krzywej nośności sugeruje korzystny rozkład sił ścinających względem nachylonych ścianek, co może tłumaczyć jego stabilne zachowanie. Jest to potencjalnie bardzo cenny wariant dla zastosowań wymagających zarówno sztywności, jak i tolerancji deformacyjnej.

Profile o łagodnych przejściach (półkolisty, balonikowy, sinusoidalny) charakteryzują się mniejszą sztywnością i niższą nośnością maksymalną, lecz oferują większą odporność na lokalne

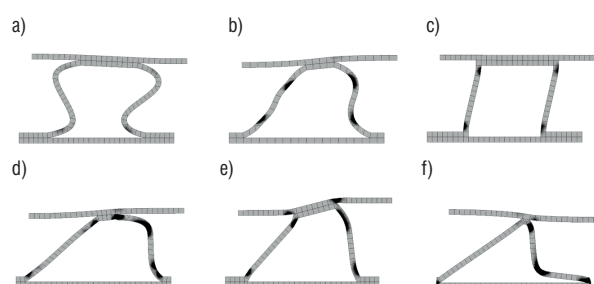
Trapezoidal (Fig. 4f). Damage is distributed evenly along the inclined sidewalls, and its intensity does not result in catastrophic loss of structural integrity.

Discussion of the obtained results

The obtained results clearly demonstrate that the geometry of the corrugated layer in corrugated board plays a crucial role in the structural response under transverse shear conditions. Profiles with sharp transitions – particularly the triangular one – exhibit high initial stiffness and high peak shear force, but their susceptibility to local overstressing leads to rapid and brittle failure. The highest stress concentrations typically occur at corners and crest points of the wave.

In this context, the trapezoidal profile is especially noteworthy. Despite the presence of angular segments, it shows strong resistance to damage propagation. The absence of a sudden drop in the force–displacement curve suggests a favorable distribution of shear forces along the inclined sidewalls, which may explain its stable mechanical behavior. This makes it a promising candidate for applications requiring both stiffness and deformation tolerance.

Profiles with smooth transitions (semicircular, balloon-shaped, sinusoidal) are characterized by lower stiffness and reduced maximum load capacity, yet they offer greater resistance to local overloads. In these cases, failure initiates later and spreads more diffusely, which may facilitate gradual stress redistribution within the structure.



Rys. 4. Lokalizacja uszkodzeń: (a) fluting balonikowy, (b) fluting półkolisty, (c) fluting prostokątny, (d) fluting sinusoidalny, (e) fluting trapezowy, (f) fluting trójkątny

Fig. 4. Failure zones: (a) balloon-shaped fluting, (b) semicircular fluting, (c) rectangular fluting, (d) sinusoidal fluting, (e) trapezoidal fluting, (f) triangular fluting

Visual analysis (Fig. 4) confirms these observations: damage zones are strongly localized in sharp-edged profiles, while in smooth geometries, failure is more evenly distributed.



przeciążenia. Zniszczenia w tych przypadkach pojawiają się później i rozprzestrzeniają się w bardziej rozproszony sposób, co może sprzyjać stopniowemu rozładowaniu naprężeń w konstrukcji.

Analiza wizualna (rys. 4) potwierdza powyższe obserwacje: strefy zniszczeń są silnie skoncentrowane w profilach ostrych, natomiast w układach łagodnych uszkodzenia mają bardziej rozproszony charakter.

Wnioski

Kształt warstwy falistej znacząco wpływa na sztywność transwersalną i odporność na ścinanie. Ostre profile (tj. trójkątny) osiąga najwyższą nośność, lecz jest bardziej podatny na szybkie zniszczenie.

Geometrie o łagodnym przebiegu (balonikowy, półkolisty, sinusoidalny) wykazują niższe wartości siły maksymalnej, ale zapewniają bardziej kontrolowany, rozproszony przebieg uszkodzeń.

Profil trapezowy łączy wysoką sztywność początkową z relatywnie dużą tolerancją deformacji, co czyni go kompromisowym rozwiązaniem między sztywnością a stabilnością struktury.

Zastosowanie modelu nieliniowego z kryterium Tsai-Wu pozwala na realistyczne odwzorowanie inicjacji i rozwoju uszkodzeń oraz ocenę przydatności przyszłościowych geometrii falowania.

Wybór optymalnej geometrii flutingu powinien uwzględniać nie tylko wartości maksymalnych sił, ale również charakter degradacji i rozkład naprężeń w warunkach rzeczywistych.

Artykuł recenzowany

Conclusions

The shape of the corrugated layer significantly influences transverse stiffness and shear resistance. Sharp-edged profile (i.e. triangular) achieves the highest load capacity but is more prone to sudden failure.

Smooth geometries (balloon-shaped, semicircular, sinusoidal) exhibit lower peak forces but ensure a more controlled and distributed damage progression.

The trapezoidal profile combines high initial stiffness with relatively good deformation tolerance, making it a balanced solution between stiffness and structural stability.

The use of a nonlinear model with the Tsai-Wu failure criterion enables realistic simulation of damage initiation and propagation, as well as assessment of the applicability of future fluting geometries.

LITERATURA/LITERATURE

- [1] Andrzejak K., Mrówczyński D., Gajewski T., Garbowski T. 2023. "Investigating the Effect of Perforations on the Load-Bearing Capacity of Cardboard Packaging". *Materials* 17 (17) : 4205. doi.org/10.3390/ma17174205.
- [2] Anastas J.V. 1998. "Edgewise compression test". International Corrugated Containers Conference & Trade Fair, Proceedings.
- [3] Avilés F., Carlsson L.A., Browning G., Millay K. 2009. "Investigation of the Sandwich Plate Twist Test". *Experimental Mechanics* 49 : 813-822.
- [4] Avilés F., Carlsson L.A., May-Pat A. 2012. "A Shear-Corrected Formulation for the Sandwich Twist Specimen". *Experimental Mechanics* 52 : 17-23.
- [5] Avilés F., Couoh-Solis F., Carlsson L.A., Hernández-Pérez A., May-Pat A. 2011. "Experimental determination of torsion and shear properties of sandwich panels and laminated composites by the plate twist test". *Composite Structures* 93 : 1923-1928.
- [6] Brittain J. 2003. "ECT: Edge crush test | ECT: Prueba de aplastamiento del borde". *Mari Papel y Corrugado* 16 (3) : 49-50.
- [7] Chalmers I.R. 2007. "The use of MD shear stiffness by the torsional stiffness technique to predict corrugated board properties and box performance". *Appita Annual Conference* 1 : 145-150.
- [8] Chalmers I.R. 2007. "The use of MD shear stiffness by the torsional stiffness technique to predict corrugated board properties and box performance". *Appita Journal* 60 (5) : 357-361.
- [9] Coffin D.W., Wade K., Hussain S. 2019. "Links between BCT and lifetime for corrugated boxes". Paper Conference and Trade Show, PaperCon 2019 2 : 1334-1348.
- [10] Di Russo F.M., Desole M.M., Gisario A., Barletta M. 2023. "Evaluation of wave configurations in corrugated boards by experimental analysis (EA) and finite element modeling (FEM): the role of the micro-wave in packaging design". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 126 (11-12) : 4963-4982.
- [11] Frank B. 2006. "ECT as a tool". *International Paper Board Industry* 49 (8) : 28-30.
- [12] Frank B., Cash D. 2022. "Edge crush testing methods and box compression modeling". *Tappi Journal* 21 (8) : 418-433.
- [13] Frank B., Kruger K. 2021. "Assessing variation in package modeling". *Tappi Journal* 20 (4) : 231-238.
- [14] Garbowski T. 2018. "Degradation of mechanical properties of cardboard due to manufacturing and converting processes". TAPPI Progress in Paper Physics Seminar PPPS2018.
- [15] Garbowski T. 2023. "Evaluating safety factors in corrugated packaging for extreme environmental conditions | Ocena czynników bezpieczeństwa opakowań z tektury falistej w ekstremalnych warunkach środowiskowych". *Packaging Review* 2 (4) : 6-15. doi.org/10.15199/42.2023.4.1.
- [16] Garbowski T. 2023. "Safety factors in the design of corrugated board packaging | Współczynniki bezpieczeństwa w projektowaniu opakowań z tektury falistej". *Packaging Review* 2 (3) : 16-22. doi.org/10.15199/42.2023.3.2.
- [17] Garbowski T. 2023. "The most common mistakes when estimating the load-bearing capacity of corrugated board packaging | Najczęściej popełniane błędy podczas szacowania nośności opakowań z tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 79 (9) : 485-488. doi.org/10.15199/54.2023.9.1.



- [18] Garbowski T. 2024. "The role of homogenization in predicting the load-bearing capacity of corrugated packaging - a short review of methods and applications | Rola homogenizacji w predykcji nośności opakowań z tektury falistej - przegląd metod i zastosowań". *Przegląd Papierniczy* 80 (5) : 271-278. doi.org/10.15199/54.2024.5.1.
- [19] Garbowski T. 2023. "The use of artificial intelligence for the optimal production of corrugated board | Zastosowanie sztucznej inteligencji do optymalnej produkcji tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 79 (5) : 279-288. doi.org/10.15199/54.2023.5.2.
- [20] Garbowski T. 2024. "Revolutionizing Corrugated Board Production and Optimization with Artificial Intelligence". *BioResources* 19 (2) : 2003-2006. doi.org/10.15376/biores.19.2.2003-2006.
- [21] Garbowski T., Borecki P. 2024 "Analysis of the impact of futuristic corrugated layer shape on mechanical properties and cost of single-wall corrugated board | Analiza wpływu futurystycznych kształtów warstwy pofalowanej na parametry mechaniczne i koszt trójwarstwowej tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 80 (11) : 609-615. DOI: 10.15199/54.2024.11.1.
- [22] Garbowski T. 2025 „Flat crush analysis of corrugated board with futuristic fluting geometries | Analiza zgniatania płaskiego tektury falistej z warstwą pofalowaną o futurystycznych kształtach”. *Przegląd Papierniczy* 81 (4) : 205-212, 2025. DOI: 10.15199/54.2025.4.1.
- [23] Garbowski T. 2025 "Review on Numerical Homogenization of Corrugated Materials. State-of-the-art in Modeling of Corrugated Board". *BioResources* 20 (2) : 5157-5184. DOI:10.15376/biores.20.2.Garbowski
- [24] Garbowski T., Borysiewicz A. 2014. "The stability of corrugated board packages | Stateczność opakowań z tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 70 (8) : 452-458.
- [25] Garbowski T., Cornaggia A., Gajewski T., Grabski J.K. 2023. "Identification of material and structural parameters of corrugated board in production and converting processes". *EUROMECH COLLOQUIUM 642 International Colloquium on Multiscale and Multiphysics Modelling for Advanced and Sustainable Materials*, Rome, Italy, September 23-27.
- [26] Garbowski T., Gajewski T. 2022. "Transverse shear modulus in corrugated materials | Moduł ścinania poprzecznego tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 76 (2) : 103-108.
- [27] Garbowski T., Imbierowicz R. 2014. "Sensitivity analysis of edge crush test | Analiza wrażliwości w teście krawędziowego zgniatania". *Przegląd Papierniczy* 70 (9) : 559-564.
- [28] Garbowski T., Knitter-Piątkowska A., Marek A. 2021. "New edge crush test configuration enhanced with full-field strain measurements". *Materials* 14 (19).
- [29] Garbowski T., Knitter-Piątkowska A., Winiarski P. 2023. "Simplified Modelling of the Edge Crush Resistance of Multi-Layered Corrugated Board: Experimental and Computational Study". *Materials* 16 (1).
- [30] Garbowski T., Marek A. 2012. "On the Sensitivity of Creasing Force to Parameters in Constitutive Models of Paperboard". 8th European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria : pp:1751-1766.
- [31] Gilchrist A.C., Suhling J.C., Urbanik T.J. 1999. "Nonlinear finite element modeling of corrugated board". *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division*, AMD 231 : 101-106.
- [32] Haj-Ali R., Choi J., Wei B.-S., Popil R., Schaepe M. 2009. "Refined nonlinear finite element models for corrugated fiberboards". *Composite Structures* 87 (4) : 321-333.
- [33] Hiller B. 2017. "Optical strain field analysis an innovative test method to analyse the mechanical properties of fibre-based materials". *International Paperworld IPW 2017-Janua* (11-12) : 11-13.
- [34] Hoon M.L., Park J.M. 2004. "Flexural stiffness of selected corrugated structures". *Packaging Technology and Science* 17 (5) : 275-286.
- [35] Jamsari A., Nevins A., Kueh C., Gray-Stuart E., Dahm K., Bronlund J. 2020. "Modelling the Edge Crushing Performance of Corrugated Fibreboard Under Different Moisture Content Levels". *Mechanisms and Machine Science* 75 : 609-620.
- [36] Jamsari M.A., Kueh C., Gray-Stuart E.M., Dahm K., Bronlund J.E. 2020. "Modelling the impact of crushing on the strength performance of corrugated fibreboard". *Packaging Technology and Science* 33 (4-5) : 159-170.
- [37] Kmita-Fudalej G., Szewczyk W., Kofakowski Z. 2020. "Calculation of honeycomb paperboard resistance to EDGE crush test". *Materials* 13 (7).
- [38] Łęcka M., Mania R., Marynowski K. 2006. "New method of the ECT index of corrugated board determination | Nowa metoda wyznaczania odporności na zgniatanie krawędziowe tektury falistej". *Przegląd Papierniczy* 62 (4) : 207-210.
- [39] Marek A., Garbowski T. 2014. "Sensitivity analysis in homogenization process of corrugated paperboards". 39th Solid Mechanics Conference Book of Abstracts : 281-282.
- [40] Mikami E., Ibaraki T., Kodaka I. 2005. "Optimum design of flute structure for edgewise compression of corrugated fiberboard". *Kami Pa Gikyoshi/ Japan Tappi Journal* 59 (10) : 94-100.
- [41] Mrówczyński D., Gajewski T., Grabski J.K., Garbowski T. 2024. "Verification of numerical homogenization for corrugated boards through experimental tests and simulations". 43rd Solid Mechanics Conference: SolMech, Wrocław, Poland, September 16-18.
- [42] Mrówczyński D., Gajewski T., Pośpiech M., Garbowski T. 2024. "Estimation of the Compressive Strength of Cardboard Boxes Including Packaging Overhanging on the Pallet". *Applied Sciences* 14 (2) : 819. doi.org/10.3390/app14020819.
- [43] Rogalka M., Grabski J.K., Garbowski T. 2024. "A Comparison of Two Artificial Intelligence Approaches for Corrugated Board Type Classification". *Engineering Proceedings* 56 (1) : 272. doi.org/10.3390/ASEC2023-15925.
- [44] Rogalka M., Grabski J.K., Garbowski T. 2024. "Deciphering Double-Walled Corrugated Board Geometry Using Image Analysis and Genetic Algorithms". *Sensors* 24 (6) : 1772. doi.org/10.3390/s24061772.
- [45] Rogalka M., Grabski J.K., Garbowski T. 2024. "In-Situ Classification of Highly Deformed Corrugated Board Using Convolution Neural Networks". *Sensors* 24 (4) : 1051. doi.org/10.3390/s24041051.
- [46] Schrampf K.E., Whitsitt W.J. 1988. "Faster, alternative ECT test procedure". *Corrugated Containers Conference, Proceedings of the Technical Association of the Pulp and Paper Industry* : 65-69.
- [47] Szewczyk W. 2008. "Edge crush test of corrugated board | Odporność tektury falistej na zgniatanie krawędziowe". *Przegląd Papierniczy* 64 (2) : 93-96.
- [48] Tsai S. W., Wu E. M. 1971. "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials". *Journal of Composite Materials*, 5(1) : 58-80. Doi. org/10.1177/002199837100500106.
- [49] Tutak D., Özakhun C., Akgul A. 2007. "The examination of the impact of humidity on cardboard endurance in the offset printed and laminated packages". *Proceedings of the Technical Association of the Graphic Arts, TAGA* : 575-584.